

电路量子电动力学*

路尚润[†]

(中山大学物理学院, 广东广州, 510275)

2023年11月6日

摘要: 电路量子电动力学主要研究超导电路构成的非线性人工原子与量子化电磁场的相互作用, 在实现量子计算中具有重要意义。在本文中, 我们以实现量子计算为目的的逻辑, 首先介绍了量子谐振器这种等间距能级结构, 然后将其与约瑟夫森结这种非线性元件结合, 构造了两种超导量子干涉仪, 然后实现了三种经典的量子比特, 即电荷量子比特、磁通量子比特以及相位量子比特, 最后推导了量子比特与谐振器之间的相互作用。本文完成了量子计算的存储以及调控部分的构建以及理论推导, 并对与环境的耦合以及系统求解和动力学演化等方向进行了展望。

关键词: 电路量子电动力学, 量子计算, 超导电路

Circuit Quantum Electrodynamics

Shangrun Lu

School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong, China

November 6, 2023

Abstract: Circuit quantum electrodynamics studies how artificial atoms in superconducting circuits interact with quantized electromagnetic fields, which is crucial for quantum computing. In this paper, we introduce a key component, a quantum resonator with equally spaced energy levels, and combine it with Josephson junctions to create superconducting quantum interference device. Then we implement three classic qubit types –charge, flux, and phase qubits –and explore their interactions with resonators. In this work, the construction and theoretical derivation of the storage and regulation parts of quantum computing are completed, and the coupling with the environment, system solving and dynamic evolution are prospected.

Keywords: Circuit Quantum Electrodynamics, Quantum Computing, Superconducting Circuits

*电动力学讨论班课程论文

[†]学号: 21305127 专业: 物理学 邮箱: lushr3@mail2.sysu.edu.cn

1 引言

电路量子电动力学 (Circuit Quantum Electrodynamics, Circuit QED) 是电动力学和量子力学以及电子学的结合学科, 研究超导电路构成的非线性人工原子或量子比特与量子化电磁场的相互作用^[1]。

随着科技的进步, 量子计算、量子信息等领域有着迅速发展的趋势, 而其与经典计算机的区别是储存单元能够包含的信息更加丰富了。在传统计算中, 我们通常使用 0 或 1 进行二进制储存及运算。在量子体系下, 利用态叠加原理, 我们可以将某个状态写成 0 态与 1 态叠加的形式, 即

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (1)$$

此时, α 、 β 都是可以调控的系数, 从而使得一个储存单元能够储存更多的信息。量子计算中的储存单元即称为量子比特 (Qubit), 是量子计算中必不可少的。

我们可以利用一个布洛赫球 (Bloch sphere) 对量子比特进行描述, 其是一个在量子力学中用于可视化和表示单个量子比特状态的一个工具, 如图 1 所示^[2]。

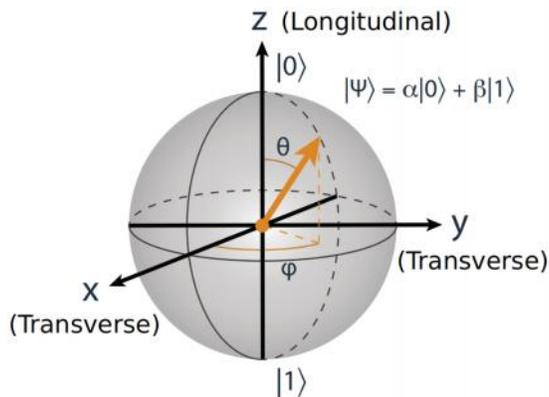


图 1: 布洛赫球

它是一个三维球体, 可以表示纯态和混合态。其上的点代表了单个量子比特的状态, 而球体上的运动和旋转表示了量子比特状态的演化和操作。倘若要描述更加复杂的多量子比特体系, 将会引入布洛赫空间 (Bloch space) 的概念, 但由于时间有限, 我们仅仅讨论单量子比特在电路 QED 中的实现以及一些调控方式。

2 谐振器

为构造量子比特, 首先应当获取一个能级系统, 在电路 QED 中, 一种十分经典的方式是利用 LC 电路; 而量子比特之间相互作用时一般会与谐振器耦合, 简单的 LC

谐振器是十分经典的一种耦合方式，2D 的谐振器能够提供更多的模式，因此现在基本采用 2D 谐振器进行耦合。因此为保证文章的连续性，我们在此对谐振器进行一并讨论。

2.1 LC 谐振器

对于 LC 电路，由于在室温下，其此时的能量远远大于自身的本征能级差，因此在电子学中使用并不会对其引入量子化，可以认为其能量是连续的。

但在极低温的环境下，由于系统能量接近其基态能量，LC 谐振器可以产生一个十分优异的能级系统。LC 谐振器的示意图如图2所示。

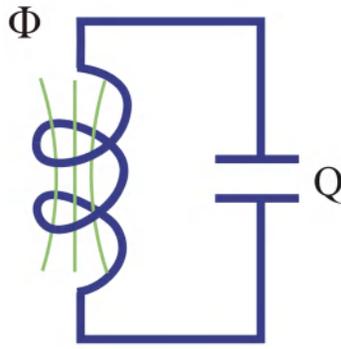


图 2: LC 谐振电路

可以定义电感上的磁通 Φ ，则此时电容两端电压差值满足 $V = d\Phi/dt$ ，我们可以很轻易地写出其拉氏量

$$L = \frac{C\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (2)$$

以及正则动量

$$p_{\Phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi} = CV = Q. \quad (3)$$

可知， Q 和 Φ 为一对正则变量，其泊松括号满足

$$\{\Phi, Q\} = 1. \quad (4)$$

则利用量子化，即可得到其哈密顿以及对易关系为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} + \frac{\hat{Q}^2}{2C}, \quad [\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar. \quad (5)$$

可以发现，其与经典谐振子十分相似，则定义产生湮灭算符

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_r}} \left(\hat{\Phi} - iZ_r \hat{Q} \right), \\ \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_r}} \left(\hat{\Phi} + iZ_r \hat{Q} \right),\end{aligned}\quad (6)$$

其中 $Z_r = \sqrt{L/C}$ 为特征阻抗，则可写出其在占有数表象下的哈密顿量

$$\hat{H} = \hbar\omega_r \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_r \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

其中 $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ 为其角频率，可见其能级也是等间距的，如图3所示。

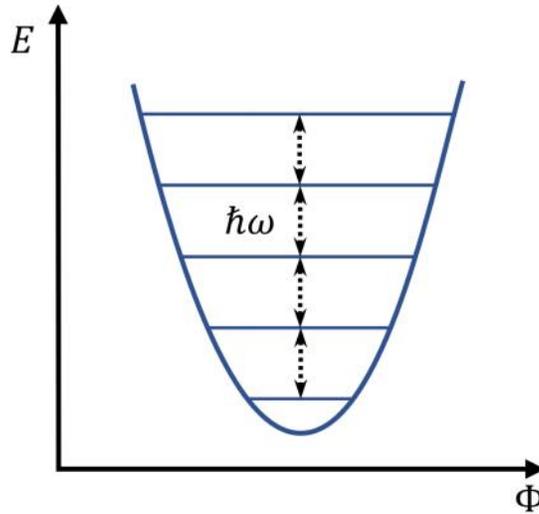


图 3: LC 谐振子能级分布

至此我们构造了一种能级结构，可以用于与量子比特进行耦合，但其还是不能作为量子比特的，因为此时非常难进行精确调控，倘若我们对基态谐振子提供一个 $\hbar\omega_r$ 的能量，其不仅可以跃迁到 1 态，并且可以继续吸收能量向较高的布居数态进行跃迁。因此，必须引入非线性能级，从而将某些态分隔开来，从而构建我们想要的二能级系统，一种十分典型的非线性元件即为约瑟夫森结，将在第三部分进行介绍。

2.2 2D 谐振器

量子器件工作时其频率量级一般在 GHz，我们之前说过，量子谐振器有许多形式，LC 振荡器只是一种形式，在电路 QED 中，实际上还有微波谐振器，我们在此讨论 2D 谐振器。

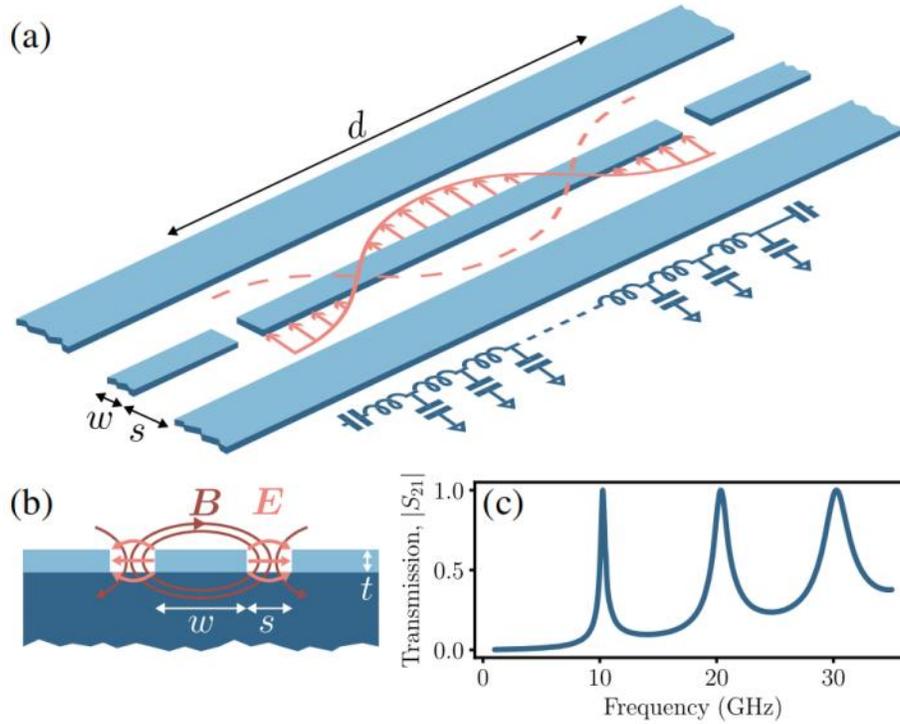


图 4: 共面波导谐振器

如图4(a)所示, 一个共面波导谐振器包括一个有限长度 d 的共面波导, 以及两侧的无限大接地导体在一个衬底上构成。中心导体厚度为 t , 宽度为 w , 两侧与厚度相同的无限大接地导体之间的间距为 s , 其横截面为图4(b)所示。通过调节这些参数, 同同轴电缆一样, 共面波导可以将电磁场限制在中心导体和地面之间的小体积内, 并使得电磁场集中在中心导体与接地导体之间, 减小其他方向的辐射。共面波导在微波工程学中有着广泛的应用^[3]。

与 LC 振荡器一样, 共面波导谐振器的电磁性质可用其特性阻抗 $Z_0 = \sqrt{l_0/c_0}$, 波导中的光速 $v_0 = 1/\sqrt{l_0c_0}$, 其中 c_0 为单位长度接地电容, l_0 为单位长度电感。

谐振器是由共面波导通过在间隔为距离 d 的两个端点上施加零电流或零电压的边界条件而形成的。零电流可以通过在中心导体上制造一个细小间隙形成的 (开放边界), 而零电压可以通过接地来实现 (短路边界)。对于两端具有开放边界的谐振器, 如上图 (a) 所示, 其基频为 $f_0 = v_0/2d$, 谐波 $f_m = (m + 1)f_0$, 称为 $\lambda/2$ 谐振器。对于一段开放一端短路的谐振器, 其基频为 $f_0 = v_0/4d$, 称为 $\lambda/4$ 谐振器。

事实上, 谐振器的多模态也起着重要作用, 我们考虑利用标准方法对其利用经典描述进行量子化。

对于在电路 QED 中相关的小信号, 共面波导谐振器可以用线性、无色散的一维介质来建模。其电报机模型如图5所示。

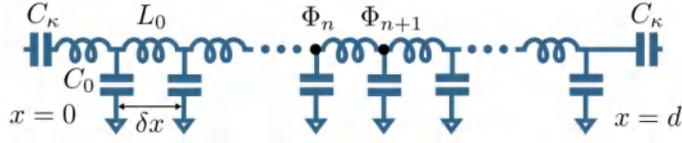


图 5: 电报机模型

可以很形象地想象出，中心导体的电感可以用一系列电感元件串联表示，而对地的电容可以用平行的组合表示。利用磁通写出其能量，每个电容为 $E_{cn} = Q_n^2/2C_0$ ，而电感 $E_{Ln} = (\Phi_{n+1} - \Phi_n)^2/2L_0$ ，其中 Φ_n 为第 n 个结点的磁通，而 Q_n 为该结点对应的共轭变量。

利用标准方法可以得到其经典的哈密顿量为

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{Q_n^2}{2C_0} + \frac{(\Phi_{n+1} - \Phi_n)^2}{2L_0} \right]. \quad (8)$$

而导体是连续的，因此我们考虑用连续极限的方式对其进行操作，单位间隔 $\delta x \rightarrow 0$ ，则可以轻易地知道 $C_0 = c_0\delta x$ 和 $L_0 = l_0\delta x$ ，并且定义连续的磁通 $\Phi(x_n) = \Phi_n$ 和电荷密度 $Q(x_n) = Q_n/\delta x$ ，则考虑将求和转变为积分，可得

$$H = \int_0^d dx \left\{ \frac{1}{2c_0} Q(x)^2 + \frac{1}{2l_0} [\partial_x \Phi(x)]^2 \right\}. \quad (9)$$

其中利用了 $\partial_x \Phi(x_n) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} (\Phi_{n+1} - \Phi_n)/\delta x$ ，而电荷 $Q(x, t) = c_0 \partial_t \Phi(x, t)$ 为广义通量 $\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^t dt' V(x, t')$ 的正则动量，其中 $V(x, t')$ 是中心导体上的接地电压。

利用正则方程，可以简单地推出其运动方程即为波动方程

$$v_0^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

其中 $v_0 = 1/\sqrt{l_0 c_0}$ 为导体中的光速。可以利用分离变量的形式简单解出

$$\Phi(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) \Phi_m(t). \quad (11)$$

对于某个单模，有 $\ddot{\Phi}_m = -\omega_m^2 \Phi_m$ 和 $u_m = A_m \cos(k_m x + \varphi_m)$ ，其中 φ_m 以及 k_m 利用边界条件确定。

利用模态的正交归一性，我们可以通过单模分解的方式写出其哈密顿量

$$H = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{Q_m^2}{2C_r} + \frac{1}{2} C_r \omega_m^2 \Phi_m^2 \right]. \quad (12)$$

其中 $C_r = dc_0$ 为总电容，而 $Q_m = C_r \dot{\Phi}_m$ 为 Φ_m 的共轭电荷量。可以轻易地看出，哈密顿为独立谐振子的能量和。因此我们同样利用之前的量子化方式，可以轻易地写出

$$\begin{aligned}\hat{a}_m^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_m}} \left(\hat{\Phi}_m - iZ_m \hat{Q}_m \right), \\ \hat{a}_m &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_m}} \left(\hat{\Phi}_m + iZ_m \hat{Q}_m \right),\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $Z_m = \sqrt{L_m/C_r}$ 为模态 m 的特征阻抗，而 $L_m^{-1} \equiv C_r \omega_m^2$ 。即可写出简洁的哈密顿形式

$$\hat{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \hbar \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m.\tag{14}$$

对于 $\lambda/2$ 谐振器， $\omega_m = (m+1)\omega_0$ 为模态频率，而 $\omega_0/2\pi = v_0/2d$ 为基模频率。

通过将约瑟夫森结直接接入谐振器的中心导体，即可使得谐振器呈现非线性变化。并且将量子比特连接在中央导体与接地导体之间可以实现两者的相互作用，我们将在第 6 部分进行介绍。

3 约瑟夫森结

3.1 约瑟夫森效应

超导量子电路的最基本的元件是约瑟夫森结，其超导性使得构成的电路 Qubit 不包含电阻，从而不会使得振荡衰减，其是实现人造原子的最基本的材料^[4]。

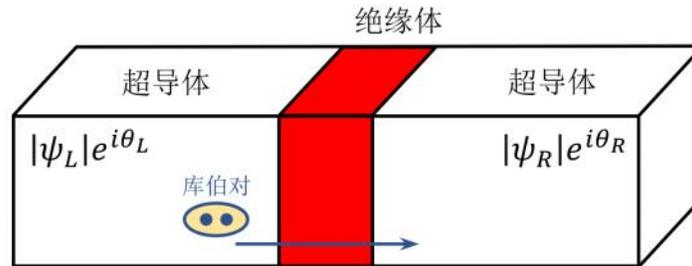


图 6: 约瑟夫森结

如图6所示，约瑟夫森结是由两个超导体中间夹一个绝缘薄层所形成的类似的三明治结构，绝缘层起着势垒的作用。由于绝缘层较薄，所以两侧的超导体形成了弱耦合，其会产生一些特性：

(1) 直流约瑟夫森效应：

当外电压为 0 时，S-I-S 结内会一直存在由库伯对遂穿形成的无阻超导电流

$$I_s = I_c \sin(\phi). \quad (15)$$

其中 $\phi = \phi_2 - \phi_1$ 为两端相位差， I_c 称为临界电流，与约瑟夫森结的具体参数有关。

(2) 交流约瑟夫森效应:

两端加偏置电压 V 后，库伯对遂穿形成的超导电流会变成交流的超导电流，此时由

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (16)$$

可知相位差频率满足

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar} = \frac{2\pi V}{\Phi_0}, \quad (17)$$

其中 $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ 为磁通量子，则超导电流满足

$$I_s(t) = I_c \sin(\omega t + \phi_0) = I_c \sin(\phi). \quad (18)$$

此时约瑟夫森结具有等效电感

$$L_J = \frac{V}{\dot{I}} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos(\phi)}. \quad (19)$$

可见其等效电感通过 $\cos(\phi)$ 被电压和电流所控制，为非线性电感，在 LC 电路中用其代替电感即可获得非等间距能级。利用上式即可得出约瑟夫森结所携带的能量为

$$E = \int IV dt = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int I \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \int \sin(\phi) d\phi = E_J [1 - \cos(\phi)]. \quad (20)$$

也可写成 $E = -E_J \cos(\phi)$ ，其与上式等价。其中 $E_J = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi}$ 称为约瑟夫森结能量，经常作为约瑟夫森器件中的能量尺度。

3.2 理论推导

我们利用超导理论以及一些技巧简单地导出约瑟夫森效应。

超导体可以用一个波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 描述，其演化规律与薛定谔方程形式相似，由 Fritz London 引入^[5]。

假设有大量库伯对 (Cooper pair) 同时处于基态时，将系统用宏观波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 描

述，宏观波函数归一化为 $\int \Psi^* \Psi d^3\vec{r} = N_S$ ， N_S 为库伯对总数，并有

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = n(\vec{r}, t), \quad (21)$$

其中 $n(\vec{r}, t)$ 为 Cooper pair 密度 (即单位体积内 Cooper pair 的数量)。因此可设

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\theta(\vec{r}, t)}, \quad (22)$$

其中 $\theta = \theta(\vec{r}, t)$ 为相位分布。 $\Psi(\vec{r}, t)$ 演化满足

$$i\hbar \partial_t \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla + q\vec{A}(\vec{r}, t))^2 \Psi(\vec{r}, t) + q\phi(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t). \quad (23)$$

其中 $m = 2m_e$ 为库伯对质量， $q = -2e$ 为库伯对电量， $\phi(\vec{r}, t)$ 为电势分布， $\vec{A}(\vec{r}, t)$ 为矢势分布， $V(\vec{r}, t)$ 为非电磁势能分布。而 $\hat{p} = -i\hbar \nabla + q\vec{A}$ 为带电粒子的机械动量，可知其和薛定谔方程形式完全相同。

并且可以得出超导体内部电流密度表达式：

$$\begin{aligned} \vec{J}_S(\vec{r}, t) &= -\frac{ne\hbar}{m_e} \nabla \theta(\vec{r}, t) - \frac{2ne^2}{m_e} \vec{A}(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{2ne^2}{m_e} \left[\frac{\hbar}{2e} \nabla \theta(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

接下来在已有的假设以及结论下推导约瑟夫森效应。首先假设约瑟夫森结具有柱状对称性，从而简化其为一维模型，可以将绝缘体视为一个分布在 $(-a, a)$ 的有限大势垒，从而利用有限深方势阱的模型，进行求解。

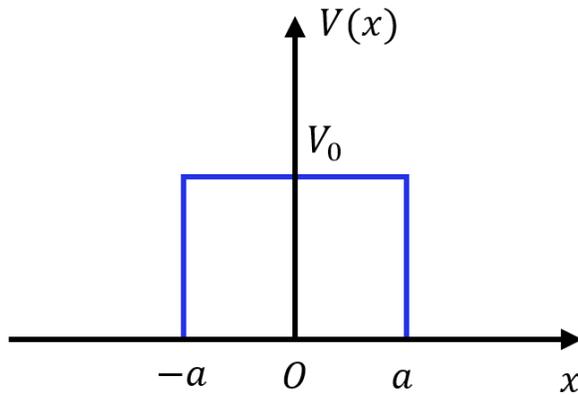


图 7: 有限深方势阱模型

在无外加磁场下，对方程 (23) 进行分离变量， $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}$ ，可得

$$\varepsilon_0\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x). \quad (25)$$

其中由 $\varepsilon_0 = \frac{m_e}{2ne^2} \frac{J_0^2}{2n}$ 。在势垒范围内有

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (\varepsilon_0 - V_0)\psi. \quad (26)$$

设方程通解形式为

$$\psi(x) = C_1 \cosh(x/b) + C_2 \sinh(x/b), \quad (27)$$

其中 $b = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - \varepsilon_0)}}$ 。在 $V_0 > \varepsilon_0$ 的情况下，将没有经典电流通过约瑟夫森结，只有超流。由于两侧为超导体，可知其波函数边界条件为

$$\begin{aligned} \Psi(-a, t) &= \sqrt{n_1}e^{i\theta_1}, \\ \Psi(a, t) &= \sqrt{n_2}e^{i\theta_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

将边界条件代入通解，可得

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sqrt{n_2}e^{i\theta_2} + \sqrt{n_1}e^{i\theta_1}}{2 \cosh(a/b)}, \\ C_2 &= \frac{\sqrt{n_2}e^{i\theta_2} - \sqrt{n_1}e^{i\theta_1}}{2 \sinh(a/b)}. \end{aligned} \quad (29)$$

利用量子力学中的几率流密度以及经过一些简单的运算^[6]，可以求出绝缘体内的超流大小：

$$\vec{J}_S = \vec{J}_C \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (30)$$

其中 $\vec{J}_C = \frac{\hbar\sqrt{n_1 n_2}}{m_e b \sinh(2a/b)} \hat{x}$ 为临界电流密度。但上式并不满足规范不变性，故我们考虑加入电磁场后对其进行修正。

考虑规范变换 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\xi$, $\phi' = \phi - \frac{\partial\xi}{\partial t}$ ，由于 \vec{J}_S 应为规范不变量，根据 (24) 式 θ 应满足相应规范变换 $\theta' = \theta - \frac{2e}{\hbar}\xi$ 。则式 (30) 需要被修改来满足规范不变。设 $\vec{J}_S = \vec{J}_C \sin\varphi$ ，其中 $\varphi(\vec{r}, t)$ 满足规范不变。设其修改后形式为 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 + f(\vec{r}, t)$ ，

则

$$\begin{aligned}
\varphi' = \varphi = \theta_1 - \theta_2 + f &= \theta'_1 - \theta'_2 + \frac{2e}{\hbar} (\xi_1 - \xi_2) + f \\
&= \theta'_1 - \theta'_2 + \frac{2e}{\hbar} \int_{1 \rightarrow 2} \nabla \xi \cdot d\vec{l} + f \\
&= \theta'_1 - \theta'_2 + f'.
\end{aligned} \tag{31}$$

可以求得修正项 f 的表达式应为

$$f(\vec{r}, t) = -\frac{2e}{\hbar} \int_{1 \rightarrow 2} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}. \tag{32}$$

因此规范不变相位的表达式应为

$$\varphi(\vec{r}, t) = \theta_1(\vec{r}, t) - \theta_2(\vec{r}, t) - \frac{2e}{\hbar} \int_{1 \rightarrow 2} \vec{A} \cdot d\vec{l}. \tag{33}$$

修正后的约瑟夫森电流关系为

$$\vec{J}_S = \vec{J}_C \sin \varphi. \tag{34}$$

对式 (24) 进行求导，并代入波函数随时间演化的系数关系可得

$$\frac{\partial \theta(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar} \left(\frac{m_e}{2ne^2} \frac{J_S^2(\vec{r}, t)}{2n} - 2e\phi(\vec{r}, t) \right). \tag{35}$$

并且对修正后的相位进行时间偏导，带入上式可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi V}{\Phi_0}. \tag{36}$$

即我们之前说的交流约瑟夫森效应。至此，我们推导了约瑟夫森结这种非线性元件的 V-I 关系。

3.3 等效电路

在 3.1 部分中可以看到，一方面由于约瑟夫森结具有一个等效的非线性电感，可以视为一个非线性的振子；另一方面，约瑟夫森结的“三明治结构”也会导致其自身存在一个等效电容 C_J ，再考虑上结的结电阻耗散的情况下，我们可以将约瑟夫森节等效为一个非线性可变电感 L_J 与一个固定电容 C_J 、固定电阻 R (可忽略) 的并联，如图8所示^[7]。

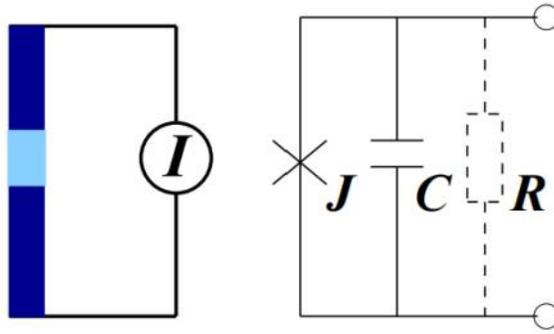


图 8: 约瑟夫森结等效模型

由此可知，在忽略电阻的情况下，根据基尔霍夫电流定律，电路的总电流 I 可以写为

$$I = I_s + C_J \dot{V} = I_c \sin \phi + C_J \ddot{\Phi}, \quad (37)$$

其中相位差 ϕ 与总磁通量 Φ 的关系满足 $\phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ 。接着我们类比拉格朗日力学的逻辑分析，分别写出这个电路动能项与势能项，最后得到它的哈密顿量。

约瑟夫森结的动能项是由结电容的静电能构成

$$K(\dot{\phi}) = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C_J \dot{\phi}^2}{2}. \quad (38)$$

通过约瑟夫森结非线性电感的电流提供了势能项，在我们外加恒定直流偏置的情况下，可以得到它的势能曲线大致如图9所示。

$$U(\phi) = E_J (1 - \cos \phi) - \frac{\hbar}{2e} I \phi. \quad (39)$$

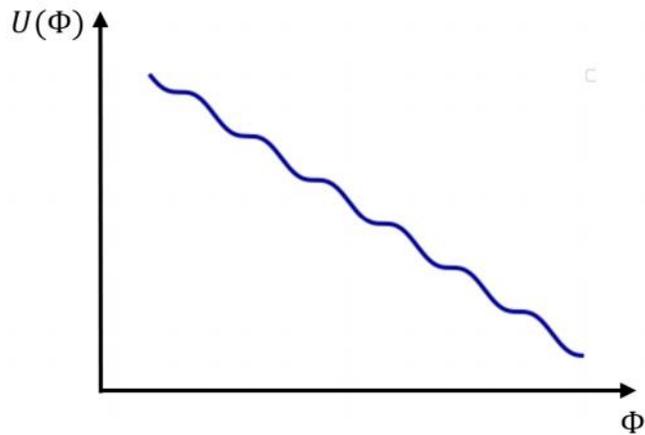


图 9: 约瑟夫森结势能曲线

这样，我们便可以通过动能与势能之差得到拉格朗日量（以相位差 ϕ 为广义坐标）

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\hbar^2 \dot{\phi}^2 C_J}{8e^2} - E_J(1 - \cos \phi) + \frac{\hbar}{2e} I \dot{\phi}. \quad (40)$$

接着，我们对上面的方程进行量子力学的推广^[8]，并且引入库伯对数量算符 n ，满足 $n = \frac{q}{2e}$ ，正则动量可写为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_J \dot{\phi} = \frac{\hbar C_V}{2e} = \frac{\hbar q}{2e} = n\hbar, \quad (41)$$

则哈密顿量可以由下式得到

$$H(p, \phi) = p\dot{\phi} - L = \frac{2e^2}{C_J \hbar^2} p^2 + E_J(1 - \cos \phi) + \frac{\hbar}{2e} I \phi. \quad (42)$$

类似地我们可以得到系统中一些物理量的算符对应：

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \hat{q} = -2ei \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \hat{n} = -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (43)$$

相应的也有对易关系

$$[\hat{\phi}_i, \hat{p}_i] = i\hbar, \quad (44)$$

利用库伯对数量算符即可写成

$$[\hat{\phi}_i, \hat{n}_i] = i. \quad (45)$$

至此，我们得到了约瑟夫森结的哈密顿量以及量子体系下的各种算符，便于后面构造电路使用。

4 超导量子干涉仪

超导量子干涉仪 (Superconducting Quantum Interference Device, SQUID) 是一种十分典型的量子器件，直流 SQUID(dc-SQUID) 为一个等效约瑟夫森结，而射频 SQUID(rf-SQUID) 为一个简单的磁通量子比特，在此我们先引入两种 SQUID，便于量子比特的设计。

4.1 直流 SQUID

在一个约瑟夫森节构成的系统中，它的拉格朗日量（哈密顿量）中的参数只有约瑟夫森结电容 C_J 与约瑟夫森结能量 E_J ，当这两个参数确定下来后，系统的哈密顿量

便是完全确定的。如图，我们可以构建直流超导量子干涉环路，在理论上人为构造一个各个参数可调的约瑟夫森结^[9]。

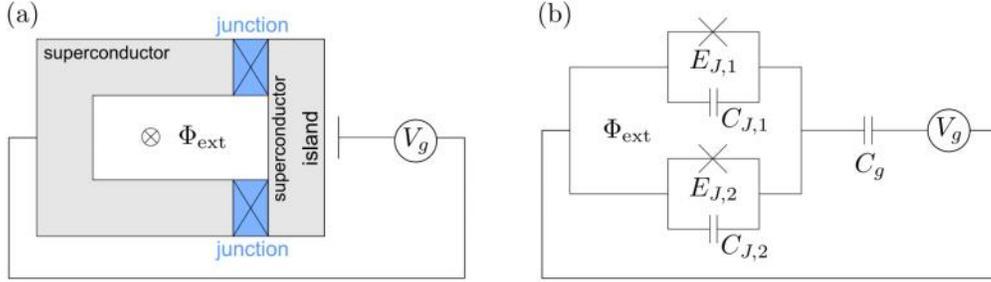


图 10: 直流 SQUID 电路模型

可以看出与单个电流偏置相比，这里新的物理特征是在于双结的有效约瑟夫森能量对穿过 SQUID 环路的磁通量具有一定的依赖性。

具体来说，考虑电路中磁通量所设的方向，电路中总的磁通量应有如下关系 $-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L + \Phi_{ext} = 0$ 。而对于一个小的 dc-SQUID 电路自感 L 通常可以舍去，因此可以取 $\Phi_L \approx 0$ ，可以得到该电路的等效拉格朗日量为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}C_{J,2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2}C_{J,1}\dot{\Phi}_1^2 + E_{J,1}\cos\Phi_1 + E_{J,2}\cos\Phi_2 + \frac{1}{2L}\Phi_L^2 \\ &\approx \frac{1}{2}C_{J,2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2}C_{J,1}\dot{\Phi}_1^2 + E_{J,1}\cos\Phi_1 + E_{J,2}\cos\Phi_2. \end{aligned} \quad (46)$$

为了将电路总磁通量的约束以另一种更直观的形式体现出来，我们做以下的变量替换

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi + \frac{1}{2}\Phi_{ext}, \\ \Phi_2 &= \Phi - \frac{1}{2}\Phi_{ext}. \end{aligned} \quad (47)$$

变量替换后，拉格朗日量可以写为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(C_{J,1} + C_{J,2})\left(\dot{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{2}(C_{J,1} - C_{J,2})\dot{\Phi}\dot{\Phi}_{ext} \\ &\quad + \frac{1}{8}(C_{J,1} + C_{J,2})\left(\dot{\Phi}_{ext}\right)^2 + E_J(\Phi_{ext})\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} - \varphi\right). \end{aligned} \quad (48)$$

其中

$$\begin{aligned} E_J(\Phi_{ext}) &= \sqrt{(E_{J,1})^2 + (E_{J,2})^2 + 2E_{J,1}E_{J,2}\cos(2\pi\Phi_{ext}/\Phi_0)}, \\ \varphi &= \arctan\left(\tan(\pi\Phi_{ext}/\Phi_0)\frac{E_{J,2} - E_{J,1}}{E_{J,2} + E_{J,1}}\right). \end{aligned} \quad (49)$$

一般情况下，若我们考虑两个并联的约瑟夫森结是对称的情况 ($E_{J,1} = E_{J,2}, C_{J,1} =$

$C_{J,2}$), 则 φ 消失, 该电路的等效 E_J 可以表示为:

$$E_J(\Phi_{\text{ext}}) = \sqrt{2E_J^2 + 2E_J^2 \cos(2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0)}. \quad (50)$$

则对称的 dc-SQUID 的有效约瑟夫森能量作为外加磁通量 Φ_{ext} 的函数图像如图11所示, 其拉格朗日量可以简化为

$$L = \frac{1}{2}C(\dot{\Phi})^2 + E_J(\Phi_{\text{ext}}) \cos(2\pi\Phi/\Phi_0). \quad (51)$$

可以看到, 利用 dc-SQUID 我们实现了约瑟夫森结能量参数 E_J 的可调节性, 其具体函数关系如上式 $E_J(\Phi_{\text{ext}})$ 所示, 实验中我们只需调节对电路施加的磁通量 Φ_{ext} 便可对该约瑟夫森结系统的各项参数进行统一调节, 故很多时候我们经常以 dc-SQUID 替换约瑟夫森结以获得更易调控的电路系统。

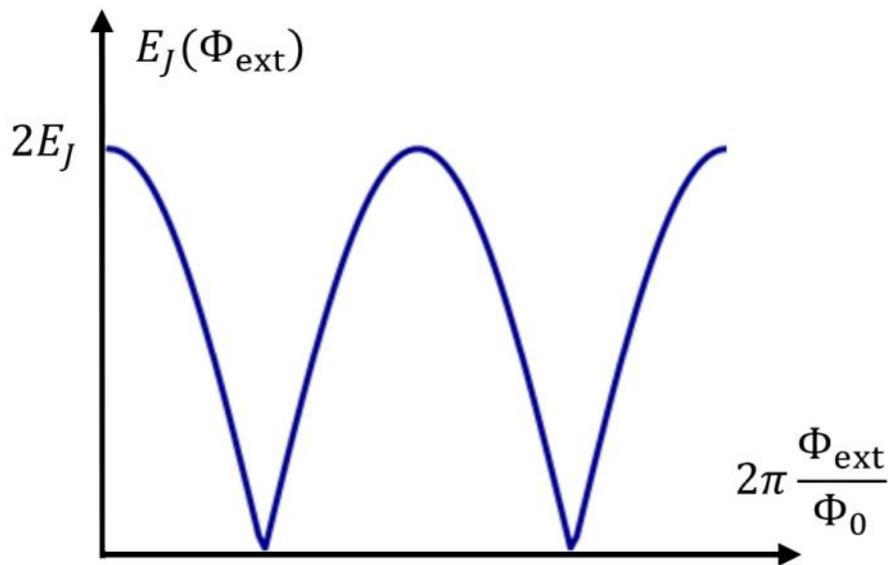


图 11: 对称 dc-SQUID 的有效约瑟夫森结能量与外加磁通的关系曲线

4.2 射频 SQUID

射频 SQUID 也是一个重要的超导回路, 其是由一个插入超导回路的约瑟夫森结构成的, 如图12所示。

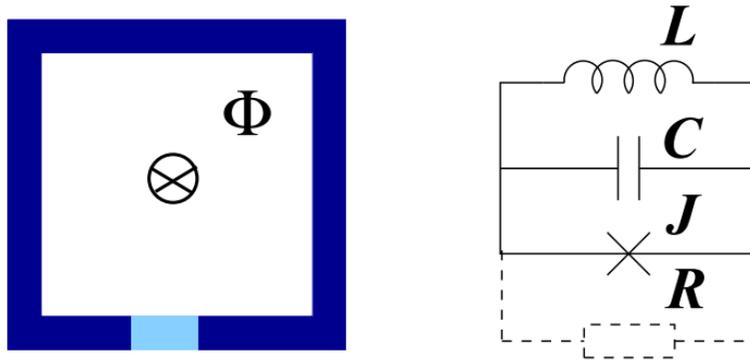


图 12: 射频超导量子干涉仪

该电路引入了约瑟夫森结的磁通偏置，为描述电路，我们引入与电感 L 相关的电流

$$I_L = \frac{\hbar}{2eL} (\phi - \phi_e), \quad \phi_e = \frac{2e}{\hbar} \Phi_e. \quad (52)$$

其中 Φ_e 是穿过 SQUID 外部的磁通，我们可以利用基尔霍夫定理写出

$$\frac{\hbar}{2e} C \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi + \frac{\hbar}{2eL} (\phi - \phi_e) = 0. \quad (53)$$

在没有耗散的情况下，其拉格朗日量为

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\hbar^2 \dot{\phi}^2}{4E_C} - E_J (1 - \cos \phi) - E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}. \quad (54)$$

对于磁通量子数为整数或 $\phi_e = 2n\pi$ 的偏置，其势能在 $\phi = \phi_e$ 处有一个绝对的极小值，如图13蓝色实线所示；对于磁通量子数为半整数的偏置，势能有两个简并的极小值，如图13虚线所示。

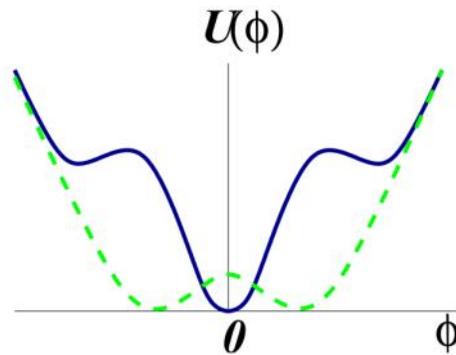


图 13: rf-SQUID 势能图

事实上。利用其半整数偏置即可构造出一个简单地磁通量子比特，将会在后面论述到。

5 超导量子比特

超导量子比特是量子计算中的重要组成部分，其基本原理是利用超导体的量子效应来实现量子比特的储存、演化和测量。目前，约瑟夫森结是实现超导量子比特的主要方法之一。前文所述的约瑟夫森结的电学性质随温度降低呈现出明显的量子行为，通过控制约瑟夫森结的大小和电流，可以实现对量子比特的操控和读取。

正如我们之前所述，约瑟夫森结以及其包含的电路可以利用结的相位 ϕ 以及库伯对数量 n 来表述的，其满足正则对易关系 $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$ ，则其也满足不确定关系 $\Delta\phi\Delta n \geq 1$ 。若此时电荷能量远大于结的能量时 ($E_C \gg E_J$)，我们称约瑟夫森结工作于电荷区，此时电荷数是准确的，库伯对数量为好量子数，且结的相位差波动很大；若约瑟夫森结的能量占据主导地位 ($E_J \gg E_C$)，我们称其工作在相位区，则此时结的相位差是准确的，磁通量子是好量子数；在中间状态下 ($E_J \sim E_C$)，电荷与相位有着同样的重要性。

超导量子比特有着三种基本类型，其量子态的物理性质不同，分别为电荷量子比特 (Charge Qubit)、磁通量子比特 (Flux Qubit)、相位量子比特 (Phase Qubit)。电荷量子比特由通过约瑟夫森结连接到超导电极的超导岛组成，在电荷区下工作，电路的量子态是岛上的离散电荷数。磁通量子比特是一个超导环路，由约瑟夫森结中断，磁通量在其中被量化。它是在相位区下工作的，因此交叉点上的相位是明确的。相位量子比特也在相位区下操作的。它由一个电流偏置的约瑟夫森结组成，该结具有对应于其约瑟夫森结上不同相位状态的量子态。

实际上，还有其他类型的量子比特电路，其对上述基本类型进行了优化，能够减小退相干引起的对噪声的耦合，比如 *quantronium* 和 *transmon qubits*。接下来我们对典型的量子比特进行详细推导。

5.1 电荷量子比特

电荷量子位由超导岛（库伯对盒）组成，该岛通过约瑟夫森结耦合到超导电极，并且通过电容耦合到控制超导岛电荷能量的偏置栅极。其中岛的充电能量 E_C 占据主导， $E_C \gg E_J$ ，并且量子态对应于岛上库伯对的数量。其结构如图14所示

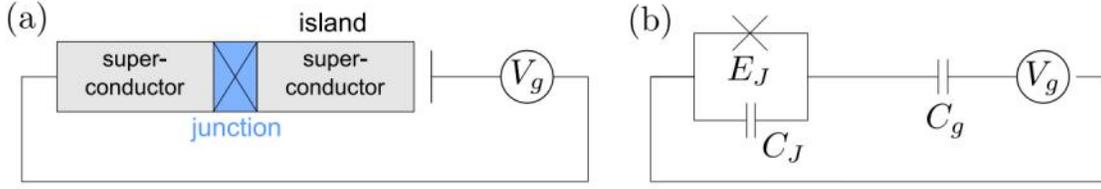


图 14: 电荷量子比特结构示意图

我们可以写出其系统拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}C_J (\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}C_g (\dot{\Phi} - V_g)^2 + E_J \cos(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}). \quad (55)$$

其中磁通 $\Phi = \Phi_0 \phi / 2\pi$ ，正则动量为

$$p = C_J \dot{\Phi} + C_g (\dot{\Phi} - V_g). \quad (56)$$

则可得其哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2C_\Sigma} (p - C_g V_g)^2 - E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (57)$$

其中 $C_\Sigma = C_J + C_g$ 。我们可以利用库伯对数量算符描述这个体系，结合 $p = 2en$ 可以写出

$$H = \frac{4e^2}{2C_\Sigma} (n - n_g)^2 - E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (58)$$

其中 $n_g = C_g V_g / 2e$ ，并且我们可以利用产生湮灭算符可以得出

$$e^{\pm i\phi} |n\rangle = |n \pm 1\rangle. \quad (59)$$

则我们可以将哈密顿量利用库伯对算符写为

$$H = \sum_n E_C (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{1}{2} E_J (|n+1\rangle \langle n| - |n-1\rangle \langle n|). \quad (60)$$

其中 $E_C = 4e^2 / 2C_\Sigma$ 。

而电荷能量为 $E_C (n - n_g)^2$ 随着 n_g 二次变化，故对于固定数量的库伯对，电荷能量与 n_g 为以 N 为中心的抛物线，正如图15的虚线所示^[10]。

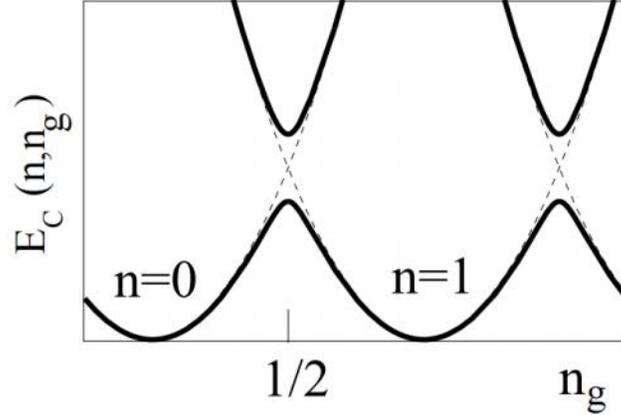


图 15: 电荷能量随着 n_g 与 n 的变化

如果 n_g 接近于 N , 则此时电荷能量较小, 且状态 $|N\rangle$ 为基态, 当其不断充电, n_g 大于 $N + 1/2$ 后, 一对库伯对通过约瑟夫森结发生隧穿, 进入超导岛, 状态 $|N + 1\rangle$ 变为基态。

则考虑简并点 $n_g = 1/2$ 附近, 此时超导电路满足 $E_C \gg E_J$, 约瑟夫森结的能量 E_J 相当于扰动, 此时约瑟夫森结工作在电荷区附近, 较弱的约瑟夫森结耦合了两个态, 修改了本征能级, 正如图实线所示。此时最低的两个能级能量接近, 其之间的能量差远小于第三个能级与他们的能量差, 即此时可以很好地将最低的两个能态与其余能态区分, 从而利用这两个能态构成二能级系统, 此时有

$$H = E_C (n_g)^2 |0\rangle \langle 0| + E_C (1 - n_g)^2 |1\rangle \langle 1| - \frac{1}{2} E_J (|1\rangle \langle 0| - |0\rangle \langle 1|). \quad (61)$$

我们可以利用泡利矩阵简单地写出哈密顿量的形式, 取 $|0\rangle = (1, 0)^T$ $|1\rangle = (0, 1)^T$ 则

$$H = -\frac{1}{2} E_C (1 - 2n_g) \sigma_z - \frac{1}{2} E_J \sigma_x. \quad (62)$$

其中 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为泡利矩阵。

由于 SQUID 具有可协调约瑟夫森能量 $E_J = E_J(\Phi_{\text{ext}})$, 我们可以将其对约瑟夫森结替换, 电路如图 16 所示

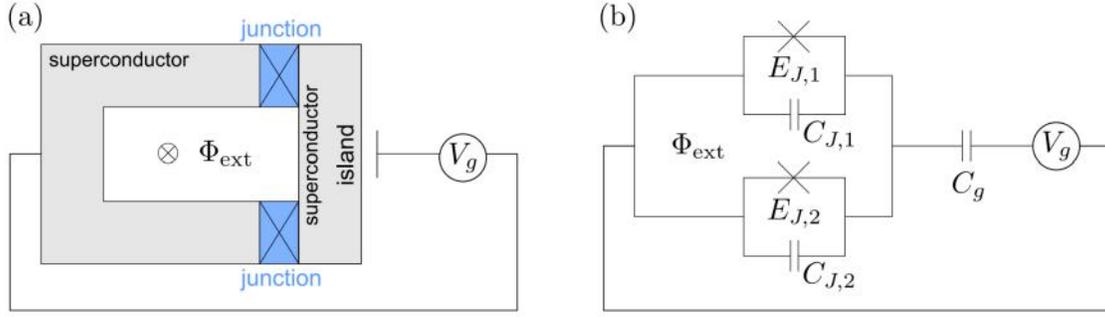


图 16: 用 SQUID 替换后的 Charge Qubit

则此时哈密顿量为:

$$H = -\frac{1}{2}E_C(1 - 2n_g)\sigma_z - \frac{1}{2}E_J(\Phi_{\text{ext}})\sigma_x. \quad (63)$$

其中对于对称的 SQUID 有

$$E_J(\Phi_{\text{ext}}) = E_J\sqrt{2 + 2\cos(2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0)}, \quad (64)$$

是外加磁通的函数，这样可以形成可调电路，更便于对电路进行操作。

5.2 transmon 量子比特

因为超导量子比特对来自内在与外在的退相干因素很敏感，所以它的相干时间不长。外在退相干因素，比如局部电磁场环境，可以通过合理的设计超导量子电路以及减弱外界环境来进行改善。然而，内在的低频噪声很难从根本上消除，所以超导电路的内在因素限制了相干时间的延长。

对于超导电荷量子比特，最主要的噪声来自于电荷涨落，比如材料衬底表面与氧化层约瑟夫森结表面的电荷涨落；对超导磁通和相位量子比特，主要的噪声来自于磁通涨落。为了改善各种噪声对超导量子比特的影响，各种改进型的超导量子比特也在最近被设计出来并实验验证。其中 transmon 量子比特就是一种主要的改进型超导量子比特。

其结构与电荷量子比特一致，只是此时结的工作区域不再位于电荷区，其结构如图17 (b) 所示。

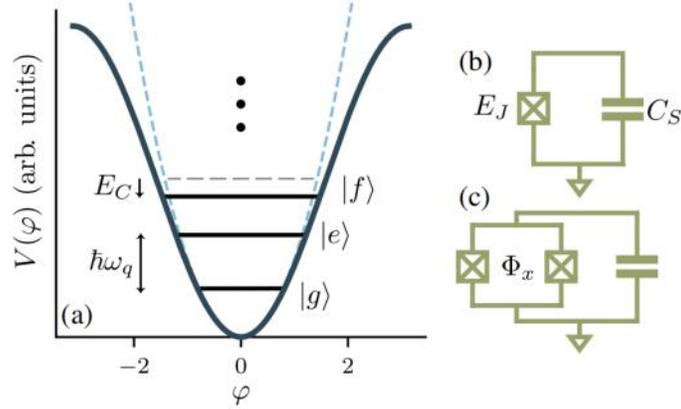


图 17: (a)transmon 量子比特的余弦势阱(实线)与 LC 振荡器的二次势阱(虚线)的比较 (b) 固定频率的 transmon 量子比特电路 (c) 用 dc-SQUID 替换的 transmon 量子比特

事实上，正如之前所说，上述的电路形式与电压偏置的电荷量子比特一致，因此我们直接写出其哈密顿量。在 $C_g \ll C_\Sigma = C_J + C_s$ 条件下，利用一些近似即可类似得到

$$\hat{H}_T = \frac{(\hat{Q} - Q_g)^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \hat{\Phi}\right) = 4E_C (n - n_g)^2 - E_J \cos(\phi). \quad (65)$$

其中 $\hat{n} = \hat{Q}/2e$ ，相位算符 $\phi = (2\pi/\Phi_0) \hat{\Phi}$ ，电荷能量 $E_C = e^2/2C_\Sigma$ ，偏置电荷数 $n_g = Q_g/2e$ ，而偏置电荷可以由我们无法不想要的外部环境扰动或施加的电压偏置 $V_g = Q_g/C_g$ 所得到。

\hat{H}_T 的能谱是通过 E_J/E_C 来调控的，分别对应三种量子比特：

- (1) 在 $E_J/E_C \ll 1$ 时，对应电荷量子比特；
- (2) 在 $E_J/E_C \approx 1$ 时，对应 quantronium；
- (3) 在 $E_J/E_C \gg 1$ 时，对应 transmon 量子比特。

其不同能量比下的能谱如图 18 所示，展示了在库伯对数表象下，最低的三个能级的能谱^[11]。

在电荷能量占据主导的情况下，结可以视为微扰，此时即为 \hat{n} 的能级，而栅极电荷的变化对系统会产生较大的影响，因此电路环境中不可避免的电荷波动会导致 Qubit 跃迁频率的波动，从而导致退相干。

为解决退相干问题，正如我们之前所述，此时可以增大 E_J/E_C ，典型值在 20-80 的区间内，此时结的能量较大，Qubit 偏离电荷工作区，其能级随着栅极电荷的改变也越来越小，因此也可以实现更久的相干时间。

但是，在增强退相干的同时，我们可以看出，Transmon 的非谐调性也降低了，而这种非协调性是我们控制量子比特不引起高激发态所必须的，但实际上，非谐调性的损失可以通过 $(E_J/E_C)^{-1/2}$ 给出。事实上，由于相干性的增加，我们仍然能够高保真

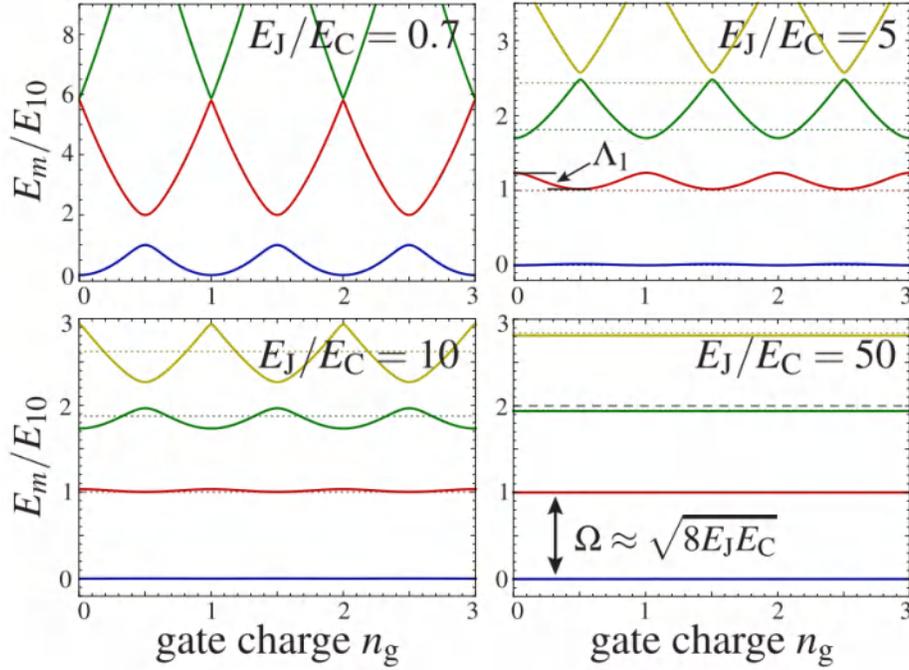


图 18: 不同能量比下的 Transmon Qubit 能谱

地对 transmon 进行调控。我们考虑在 $E_J/E_C \gg 1$ 的条件下对 \hat{H}_T 进行简化，由于此时电荷自由性较大，因而其共轭变量 $\Delta\hat{\phi} \ll 1$ ，并且由于低能级对 n_g 并不敏感，我们可以考虑利用 Taylor 展开以及一些近似，可以得到

$$H_q \approx 4E_C \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_J \phi^2 - \frac{1}{4!} E_J \phi^4. \quad (66)$$

其中我们去掉了一些常数项，因为其对能级间距以及演化过程并没有很大的影响。

同样我们将前两项进行对角化，

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \left(\frac{2E_C}{E_J} \right)^{\frac{1}{4}} (b^\dagger + b), \\ \hat{n} &= \frac{i}{2} \left(\frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{1}{4}} (b^\dagger - b). \end{aligned} \quad (67)$$

以上形式即可清晰地表明正则变量随着 E_J/E_C 变化的波动趋势，利用以上算符我们可以轻易地写出

$$H_q = \hbar\omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2} b^\dagger b^\dagger b b. \quad (68)$$

其中 $\hbar\omega_q = \sqrt{8E_C E_J} - E_C$ ，并且仅保留了具有相同产生湮灭算符的项，因为若产生湮

灭算符数量不等，其会高频震荡，而会被迅速平均掉因而被忽略。

5.3 磁通量子比特

当非线性电感的能量占主导地位时，即 $E_J \gg E_C$ ，磁通量成为了好量子数。对于之前推导的 rf-SQUID，我们可以得到其哈密顿量

$$H(Q, \Phi) = \frac{Q^2}{2C_J} - E_J \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + \frac{(\Phi - \Phi_{ext})^2}{2L}. \quad (69)$$

利用结的相位 ϕ 以及库伯对数量 n 来表述，其哈密顿量可写为

$$H(n, \varphi) = E_C n^2 - E_J \cos\phi + \frac{E_L (\phi - \phi_{ext})^2}{2}. \quad (70)$$

当 $\phi_{ext} = \frac{\pi}{2}$ 时，其势能函数为

$$U = U_0 \left[\frac{1}{2L} \left(\frac{2\pi(\Phi - \Phi_{ext})}{\Phi_0} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right]. \quad (71)$$

在此时，可以发现来自环路的自感和约瑟夫森结的非线性电感的贡献，使得其势能图像具有两个相同能级的势阱，如图19所示。

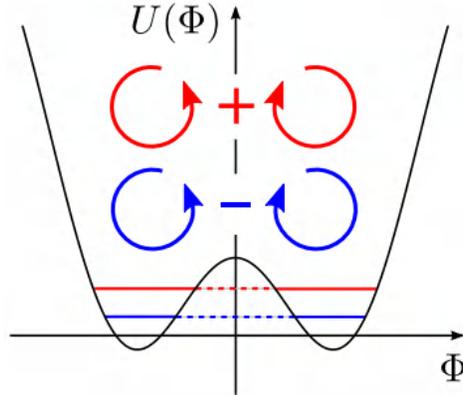


图 19: $\phi_{ext} = \frac{\pi}{2}$ 时的 rf-SQUID 势能函数

此时左右井即可构成两种量子态，而为了达到在电势的局部最小值中只包含少数量子态的状态，它需要有一个相对较大的环的自感。这就需要有一个大的回路，这固有力地增加了回路对环境通量噪声的灵敏度，并使量子叠加的退相干时间变短。

为了减小环路尺寸及其对环境的敏感性，同时保持足够的自感，研究人员在 1999 年提出了三结磁通量子比特，如图20所示。

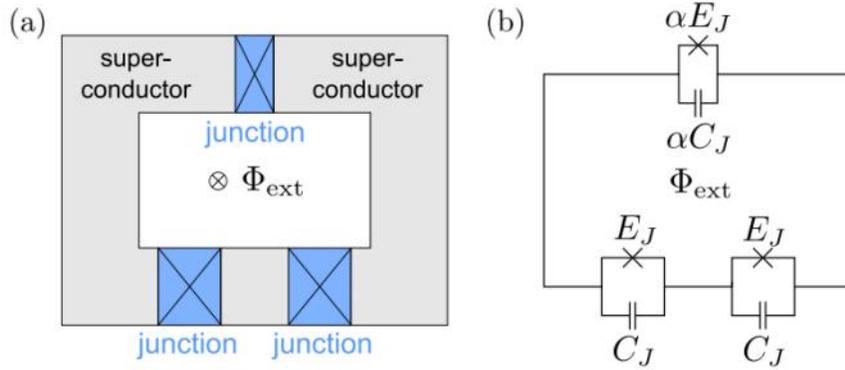


图 20: 三结磁通量子比特

其中一个结的面积比另两个结要小 α 倍。结合磁通条件 $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_{ext}$ ，令 $\Phi_p = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$ 、 $\Phi_m = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$ ，其拉氏函数可以写为

$$L = \frac{P_p^2}{2C_p} + \frac{P_m^2}{2C_m} - U(\Phi_p, \Phi_m). \quad (72)$$

其中, P_p 与 P_m 为 Φ_p 与 Φ_m 的正则动量, 势能函数为

$$U(\Phi_p, \Phi_m) = E_J \left[2 + \alpha - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_p\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_m\right) - \alpha \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi_{ext} - \Phi_p)\right) \right]. \quad (73)$$

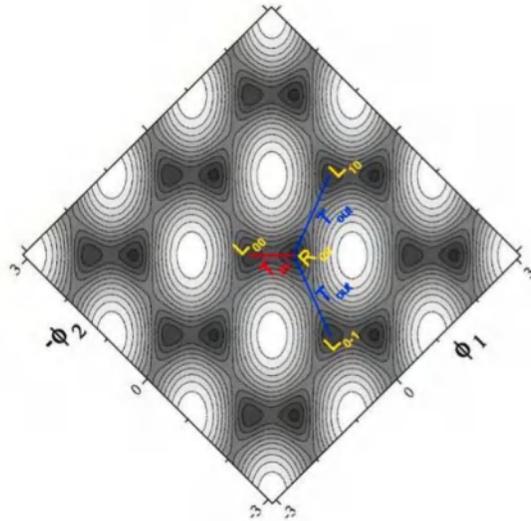


图 21: 三结磁通量子比特势能图像

绘制势能函数图像如图21所示。我们可以看到, 其同样具有双势阱结构。当 $\phi_{ext} = \frac{\pi}{2}$ 时, 两个量子态处于简并态, 可通过隧穿效应进行消除, 从而得到由两个势阱波函

数叠加而来的基态。设两个量子态分别为左态 $|L\rangle$ 和右态 $|R\rangle$ ，分别表示左阱和右阱中的束缚通量态，则二能级哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \langle L|H|L\rangle & \langle L|H|R\rangle \\ \langle R|H|L\rangle & \langle R|H|R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_L & \Delta \\ \Delta & \epsilon_R \end{pmatrix} \\ &= \frac{\epsilon_L - \epsilon_R}{2} \sigma_z + \frac{\epsilon_L + \epsilon_R}{2} I + \Delta \sigma_x \\ &= \epsilon(\Phi_{\text{ext}}) \sigma_z + \Delta \sigma_x. \end{aligned} \quad (74)$$

其中 $\epsilon(\Phi_{\text{ext}}) = (\epsilon_l - \epsilon_p)/2$ 为两个势阱态间能级差, 可用 Φ_{ext} 调节, Δ 为 $\Phi_{\text{ext}} = \Phi_0/2$ 时的隧穿速率。

5.4 相位量子比特

一个有电流偏置的约瑟夫森结电路如图22所示, 其等效的电路模型可以由右图描述, 可以得到其能级局部最小值近似为三次方, 因此可能会具有相对较大的非谐性。

我们可以调整电路参数, 使得电路能量的局部最小值附近只有几个量子态; 由于频率不匹配, 前面提到的非谐性会使得两个最低的两个量子态与局部最小值中的其他束缚态隔离, 从而可以有效地形成量子二能级系统。这样形成的二能级系统便称为相位量子比特。

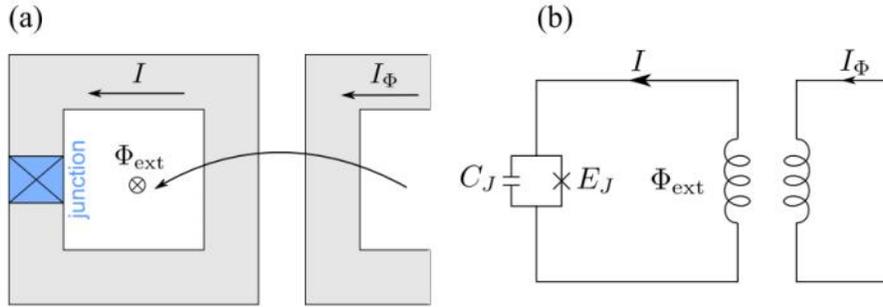


图 22: 相位量子比特结构示意图及其等效模型

上图原理中的直流电流偏置是由通过环路的磁通量电磁感应实现的。而为了使得只有少数量子态位于局部最小值之中, 这个感应偏置电流 I_b 应当十分接近临界电流 I_C , 在这种情况下, 该系统的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2} C_J \dot{\Phi}^2 - E_J [1 - \cos(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0})] + I_b \Phi. \quad (75)$$

其势能项表示为

$$U(\Phi) = -E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - I_b \Phi. \quad (76)$$

而在局部最小值点 $\Phi = \Phi_m$ 附近，将势能作为 Φ 的函数进行泰勒展开到三阶，有以下形式

$$U(\Phi) \approx U(\Phi_m) + \frac{dU(\Phi)}{d\Phi}\bigg|_{\Phi=\Phi_m} (\delta\Phi) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(\Phi)}{d^2\Phi}\bigg|_{\Phi=\Phi_m} (\delta\Phi)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U(\Phi)}{d^3\Phi}\bigg|_{\Phi=\Phi_m} (\delta\Phi)^3. \quad (77)$$

而在局部最小值点 $\Phi = \Phi_m$ 满足 $\frac{dU(\Phi)}{d\Phi}\bigg|_{\Phi=\Phi_m} = 0$ ，即有：

$$E_J \frac{2\pi}{\Phi_0} \sin\left(2\pi \frac{\Phi_m}{\Phi_0}\right) = I_b. \quad (78)$$

由此定义临界电流 $I_C = 2\pi \frac{E_J}{\Phi_0}$ ，带入化简可得三次方近似下的势能表达式，以及函数示意图如图23所示。

$$U(\Phi) = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 E_J \sqrt{1 - \left(\frac{I_b}{I_C}\right)^2} (\delta\Phi)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^3 E_J \frac{I_b}{I_C} (\delta\Phi)^3. \quad (79)$$

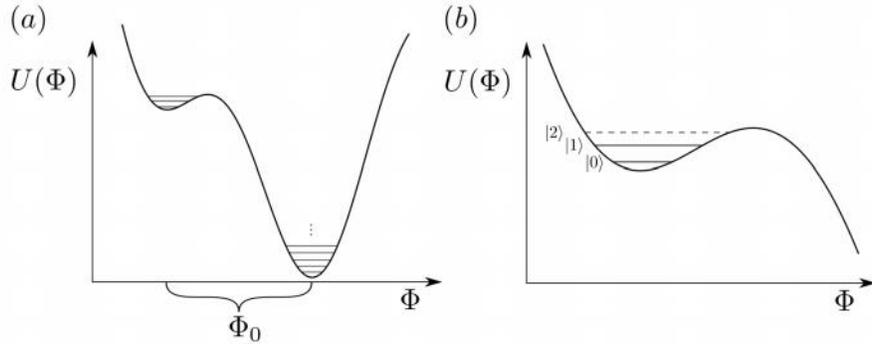


图 23: 相位量子比特能级调控示意图

由此可以得到这种情况下的势垒高度：

$$\Delta U(I_b) = U(\Phi_{peak}) - U_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} E_J \left(1 - \frac{I_b}{I_C}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (80)$$

类比于谐振子，在这个体系下的“质量”相当于等效电容 C_J ，由此可以得到该系统的震荡频率：

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_J C_J}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \sqrt{\frac{E_J}{C_J} \left(1 - \left(\frac{I_b}{I_C}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}. \quad (81)$$

并由此可以确定能级间隔 $\hbar\omega_p$ 。如果我们选择合适的参数，使得势垒高度略大于能级间距，就可以使得势阱内部的量子态大幅减少，从而使势阱中两个能量最低的状态形成一个孤立二能级系统。

至此，我们完成了三种经典的量子比特的推导以及电荷量子比特的改进模型 transmon 量子比特的推导。

6 Transmon 与谐振器之间的相互作用

现如今，transmon 量子比特由于其较好的抗退相干能力，使用十分广泛，我们在此推导其与谐振器的相互作用。

6.1 与 LC 谐振器

首先考虑 transmon 量子比特与单模谐振器相互作用，其示意图如24所示。

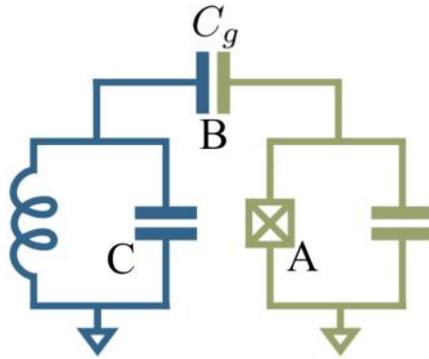


图 24: Transmon 与 LC 谐振器耦合

列出基尔霍夫方程以及元件的运动方程

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}_C + \dot{\Phi}_B - \dot{\Phi}_A &= 0, \\
 I_A &= -I_B, \\
 I_B &= I_C, \\
 I_C &= C\ddot{\Phi}_C + \frac{\Phi_C}{L} \\
 I_B &= C_g\ddot{\Phi}_B.
 \end{aligned} \tag{82}$$

可得

$$C\ddot{\Phi}_C + \frac{\Phi_C}{L} = C_g(\ddot{\Phi}_A - \ddot{\Phi}_C). \tag{83}$$

从而利用拉氏量之和 $L = L_T + L_{LC}$, 可以写出

$$\begin{aligned} L_{LC} &= \frac{C}{2}\Phi_C^2 + \frac{1}{2L}\Phi_C^2, \\ L_T &= \frac{C_\Sigma}{2}\dot{\Phi}_A^2 + \frac{C_g}{2}(\dot{\Phi}_A - \dot{\Phi}_C)^2 + E_J \cos(\phi_A). \end{aligned} \quad (84)$$

我们利用矩阵形式, 即 $\Phi^T = (\Phi_A, \Phi_C)$ 、 $Q^T = (Q_A, Q_C) = (C_A\dot{\Phi}_A, C_C\dot{\Phi}_C)$ 以及 $C = \begin{pmatrix} C_\Sigma + C_g & -C_g \\ -C_g & C + C_g \end{pmatrix}$, 可以写出其动能部分

$$K = \frac{1}{2}\dot{Q}^T C \dot{Q} = \frac{1}{2}Q^T C^{-1}Q. \quad (85)$$

则哈密顿量可写为

$$H = \frac{1}{2\bar{C}^2} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\Sigma + C_g & -C_g \\ -C_g & C + C_g \end{pmatrix} (Q_A, Q_C) + V \quad (86)$$

其中 $\bar{C}^2 = C_\Sigma C + C_\Sigma C_g + C C_g$ 。在 $C_g \ll C_\Sigma, C$ 的限制下, 可以得到

$$\begin{aligned} H &\approx \frac{1}{2C_\Sigma C} [CQ_A^2 + C_\Sigma Q_C^2 + C_g(Q_A + Q_C)^2] + V \\ &= \frac{Q_A^2 + \frac{C_g}{C}(Q_A + Q_C)^2}{2C_\Sigma} + \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q_C^2}{2C} - E_J \cos(\phi_A) \\ &\approx \frac{\left(Q_A + \frac{C_g}{C}Q_C\right)^2}{2C_\Sigma} + H_{LC} - E_J \cos(\phi_A). \end{aligned} \quad (87)$$

其中 $H_{LC} = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q_C^2}{2C}$ 是 LC 谐振器的哈密顿量, 此时定义 $\hat{n} = \hat{Q}_A/2e, \hat{n}_r = \left(\frac{C_g}{C}\right) \hat{Q}_C/2e$, 即可得到一个易于推广的哈密顿量

$$H = 4E_C (\hat{n} + \hat{n}_r)^2 + \hbar\omega_r a^\dagger a - E_J \cos\phi_A. \quad (88)$$

即为单模 LC 谐振器与 transmon 量子比特耦合的哈密顿量。

6.2 与 2D 谐振器

我们之前说过, 对于 transmon 量子比特, 其需要电容上的能量较小, 因此对应大电容, 可以将其耦合到一个共面波导谐振器上, 并且此时多模谐振器能够提供更多的

振动模式，从而可以与多种振动频率的 transmon 量子比特进行耦合。其耦合结构如图25所示，即将 transmon 量子比特接入中央导体与接地的无限大导体之间。

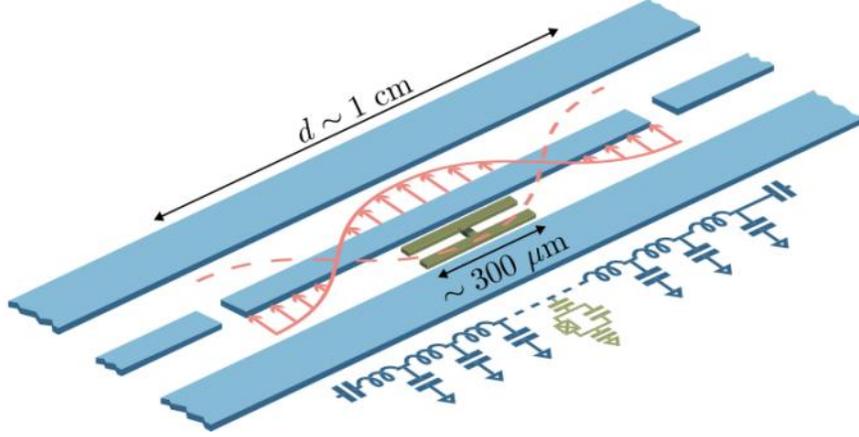


图 25: Transmon 与共面波导谐振器耦合

我们将单模谐振器的方程进行推广，利用之前的推导可知，有 $\hat{n}_r = \sum_m \hat{n}_m$ 、 $\hat{n}_m = \frac{C_g}{C_m} \cdot \frac{\hat{Q}_m}{2e}$ ，从而得到 $H_{LC} = \sum_m \hbar \omega_m a_m^\dagger a_m$ ，则总的哈密顿为

$$H = 4E_C (\hat{n} + \hat{n}_r)^2 + \sum_m \hbar \omega_m a_m^\dagger a_m - E_J \cos \phi_A. \quad (89)$$

我们假设 transmon 量子比特的振荡频率与多模谐振器的某个模式频率十分相近，即对于 $m \geq 1$ 有 $|\omega_0 - \omega_q| \ll |\omega_m - \omega_q|$ ，此时可以采用单模近似，简化为与 ω_r 的单模谐振子耦合

$$\begin{aligned} H_r &= 4E_C (\hat{n} + \hat{n}_r)^2 + \hbar \omega_r a^\dagger a - E_J \cos \phi_A \\ &= \hbar \omega_r a^\dagger a + 8E_r \hat{n} \cdot \hat{n}_r + 4E_C n_r^2 + 4E_C n^2 - E_J \cos \phi_A. \end{aligned} \quad (90)$$

其中这四项分别代表 $H_{LC} = \hbar \omega_r a^\dagger a$ 、相互作用能 $8E_r \hat{n} \cdot \hat{n}_r$ 、高阶项忽略 $4E_C n_r^2$ 、和 transmon 的哈密顿量 $H_q = 4E_C n^2 - E_J \cos \phi_A$ 。

带入参数 $Z_r = \frac{1}{\omega_r C}$ 、 $E_C = \frac{e^2}{2C_\Sigma}$ 、 $R_k = \frac{h}{e^2}$ 、 $\hat{n} = \frac{i}{2e} \frac{C_g}{C} \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_r}} (a^\dagger - a)$ 可得

$$8E_r \hat{n} \cdot \hat{n}_r = -\hbar \omega_r \frac{C_g}{C_\Sigma} \sqrt{\frac{\pi Z_r}{R_k}} \left(\frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{1}{4}} (a^\dagger - a) (b^\dagger - b). \quad (91)$$

则耦合系数 $g = \omega_r \frac{C_g}{C} \sqrt{\frac{\pi Z_r}{R_k}} \left(\frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{1}{4}}$ ，带入产生湮灭算符即可得

$$\hat{H} = \hbar \omega_r a^\dagger a + \hbar \omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2} b^\dagger b^\dagger b b - \hbar g (ab + a^\dagger b^\dagger + ab^\dagger + a^\dagger b). \quad (92)$$

即为耦合的哈密顿量。

在耦合系数远小于 ω_r 和 ω_q 时，非旋转波项 ($\text{CRT} = ab + a^\dagger b^\dagger$) 可以忽略，仅剩下旋转波项 ($\text{RWA} = ab^\dagger + a^\dagger b$)，采用旋转波近似，从而即可得到 JC 模型。而对于超强耦合区域，此项不可忽略，即为 Rabi 模型。

其在不同的耦合区间内会产生不同的动力学演化过程，通过相互作用即可调控量子比特，从而实现量子比特的调控。

7 展望

7.1 与外部环境的耦合

在讨论 transmon 量子比特时我们引入了退相干的概念，事实上，超导量子电路无时无刻不在与外界环境相互耦合，在理想状态下的超导量子电路是不存在的，故我们在此为保证调研完整性，简单论述其与外部环境耦合的过程。

我们先前处理过都是孤立的量子系统。然而，对量子电路的完整描述也必须考虑到这些系统如何与环境耦合，其中包括任何测量设备和控制电路。

事实上，环境在量子技术中发挥着双重作用：不仅是完全孤立的量子系统是不存在的，即耦合我们不想要的外部环境干扰是不可避免的，并且一个完全孤立的系统也不会有用，因为我们没有办法控制或观察它。一种简单的与外部传输线耦合的量子系统即传输线，如图26所示。

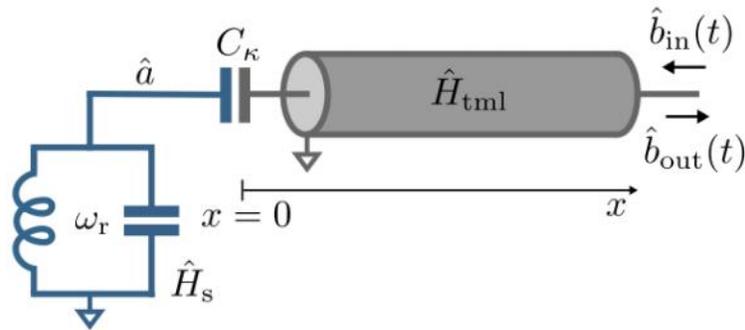


图 26: LC 谐振器耦合到传输线

通过写出其哈密顿量并带入 Lindblad 主方程即可得到其密度矩阵的演化模式^[12]。

7.2 模型求解

我们先前导出了量子比特与谐振器相互作用的哈密顿量形式，但并未求解其演化过程。事实上，对于 Rabi 模型，可以用 Bogoliubov 变换对其求解，可以参考^[13]；对于 JC 模型，可以参考^[14]。

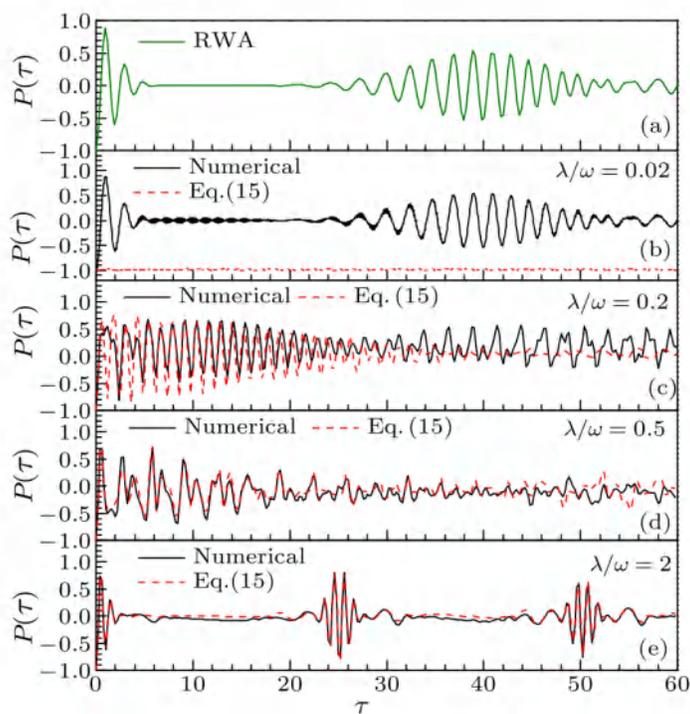


图 27: 布居数翻转动力学演化过程

其求解后的态会出现十分新奇有趣的物理现象，比如布居数翻转 $P(t)$ 的复原-崩塌现象 (如图27) 等^[15]。在此不再过多赘述。

8 总结

在本文中，我们以实现量子计算的基本思路，构建了超导量子电路的基本元件，并讨论了如何调控。

首先，我们介绍了两种谐振器，其均具有等间距的能级系统，因此对其施加跃迁能量能够使其发生连续跃迁，不能单独作为可精确调控的能级结构，但可以利用其与非线性元件结合构建量子比特这种二能级人工原子或直接与量子比特进行耦合相互作用，对其进行调控。

然后我们介绍了约瑟夫森结这种非线性元件，推导了约瑟夫森效应。利用其非线性结构可以破坏等间距能级系统，从而将一个二能级系统分立出来。

接着，我们构建了两种超导量子干涉仪，直流 SQUID 等效于一个可调控的约瑟夫森结，而射频 SQUID 的思路可以构建磁通量子比特。

之后，我们构建了三种经典的量子比特，即电荷、磁通和相位量子比特，并引入了退相干的概念，从而对电荷量子比特进行改进，构造了 transmon 量子比特，其具有较好的抗退相干性，从而使用范围较广。

再后, 利用 transmon 量子比特, 我们推导了其单模和多模谐振器之间的相互作用, 导出了耦合系数。

最后, 我们对未介绍的部分进行了展望, 简单介绍了一种与环境相互耦合的传输线模型, 以及相互作用模型的求解和动力学演化。

综上, 我们推导构建了量子计算的存储以及调控部分, 并简介了其环境的耦合以及动力学演化特征, 调研充分并有深度, 具备完整性和前沿科学性。

参考文献

- [1] BLAIS A, GRIMSMO A L, GIRVIN S M, et al. Circuit quantum electrodynamics[J]. Rev. Mod. Phys., 2021, 93: 025005. DOI: [10.1103/RevModPhys.93.025005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025005).
- [2] KRANTZ P, KJAERGAARD M, YAN F, et al. A quantum engineer's guide to superconducting qubits[J]. Applied Physics Reviews, 2019, 6(2). DOI: [10.1063/1.5089550](https://doi.org/10.1063/1.5089550).
- [3] POZAR D. Microwave Engineering, 4th Edition[M/OL]. Wiley, 2011. <https://books.google.com/books?id=JegbAAAQBAJ>.
- [4] YOU J Q, NORI F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits [J]. Nature, 2011, 474(7353): 589-597. DOI: [10.1038/nature10122](https://doi.org/10.1038/nature10122).
- [5] 黄昆. 固体物理学[M]. 北京, 中国: 高等教育出版社, 2012.
- [6] 曾谨言. 量子力学. 卷 I[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [7] WENDIN G, SHUMEIKO V S. Superconducting Quantum Circuits, Qubits and Computing[Z]. 2005. arXiv: [cond-mat/0508729](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0508729).
- [8] RODRIGUES D A. Superconducting charge qubits[J]. 2003.
- [9] JOHANSSON R. Quantum Mechanics in Superconducting Circuits and Nanomechanical Devices[D]. Technical report MC2 - Department of Microtechnology and Nanoscience, Chalmers University of Technology: 152. Göteborg, Sweden: Chalmers, Microtechnology, 2009.
- [10] MAKHLIN Y, SCHÖN G, SHNIRMAN A. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices[J]. Rev. Mod. Phys., 2001, 73: 357-400. DOI: [10.1103/RevModPhys.73.357](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.357).
- [11] VIEHMANN O. Multi-qubit circuit quantum electrodynamics[C/OL]//. 2013. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:93624302>.

- [12] MANZANO D. A short introduction to the Lindblad master equation[J]. AIP Advances, 2020, 10(2). DOI: [10.1063/1.5115323](https://doi.org/10.1063/1.5115323).
- [13] XIE Q, ZHONG H, BATCHELOR M T, et al. The quantum Rabi model: solution and dynamics[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2017, 50(11): 113001. DOI: [10.1088/1751-8121/aa5a65](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5a65).
- [14] 张智明. 量子光学[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [15] YU-YU Z, QING-HU C, SHI-YAO Z. Vacuum Rabi Splitting and Dynamics of the Jaynes - Cummings Model for Arbitrary Coupling[J]. Chinese Physics Letters, 2013, 30(11), 114203: 114203. DOI: [10.1088/0256-307X/30/11/114203](https://doi.org/10.1088/0256-307X/30/11/114203).