超导量子电路中的超强耦合和新奇现象*

路尚润† 黄维政‡ 简彬洋§

（中山大学物理学院，广东广州，510275）

2023 年 12 月 14 日

摘 要： 光与物质之间的相互作用的研究十分重要，而超强耦合中能出现许多不同于传统相互作用新奇的现象。本文在讨论了光场量子化和 LC 谐振子的基础上，理论推导了约瑟夫森效应，并利用约瑟夫森结与 SQUID 构建了多种量子比特，并在电荷量子比特的基础上构建了 transmon 量子比特。接着，通过利用量子比特与谐振腔的耦合，类比光与物质的相互作用，研究了超导量子电路中的超强耦合的产生机制，并求解了弱耦合的 JC 模型与超强耦合的 Rabi 模型，仿真求解了其动力学演化过程。最后，我们对制备贝尔态提出了一种单光子近似的方法，并提出另一种可能的方法。

关键词： 量子计算，超导量子电路，超强耦合，Bell 态

*大学生创新项目训练计划结题报告

†学号：21305127 专业：物理学 邮箱：lushr3@mail2.sysu.edu.cn

‡学号：21305348 专业：物理学 邮箱：huangwzh33@mail2.sysu.edu.cn

§学号：20340023 专业：光电信息科学与工程 邮箱：247157652@qq.com

Contents

1 课题背景及简介

量子计算作为一种革命性的计算模式，已经成为当前科学技术领域的热门研究方向之一。随着超导量子电路的快速发展，而量子比特之间、量子比特与谐振腔之间的超强耦合在其中扮演着重要角色，为实现高效可靠的量子计算提供了新的可能性。在过去几十年里，超导量子计算得到了飞速发展。超导量子计算利用超导电路中的量子比特作为信息存储和处理的基本单元，以其高度可控性和长时间相干性成为了实现大规模量子计算的有力候选方案。

在我国，国家对于量子计算的重视程度不断提升。国家政策明确将量子信息科学与技术列为战略性新兴产业，并将其纳入国家“十三五”规划和“十四五”规划。这一系列政策措施为量子计算的发展提供了强有力的支持。国家对量子计算的支持不仅体现在政策层面，还包括资金投入、人才培养等方面。这些举措为我国量子计算领域的研究者提供了广阔的发展平台，并推动了相关科研成果的快速落地。在新一轮规划中，国家对于量子计算的需求主要包括提高量子计算机性能、构建量子通信网络、开展量子仿真与优化等方面。这些需求既是对当前量子计算研究的挑战，也是对我们持续努力的动力。

光与物质之间的相互作用直观描述为一系列基本过程，其中光子被电荷分布吸收、发射或散射，本质上取决于精细结构常数[1]。而人工原子由于其易调节性可以通过与光场或谐振器耦合达到更高的耦合强度，超导量子电路即为一个实现更强耦合的载体。

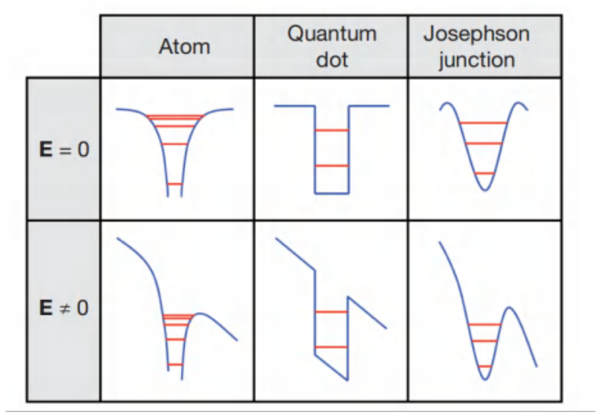

图 1: 自然原子和人工原子[2]

光与物质相互作用被分为四个耦合区间，其并非是完全分离的，因为模型需要比较的参数是不同的，其分隔区间如2所示。

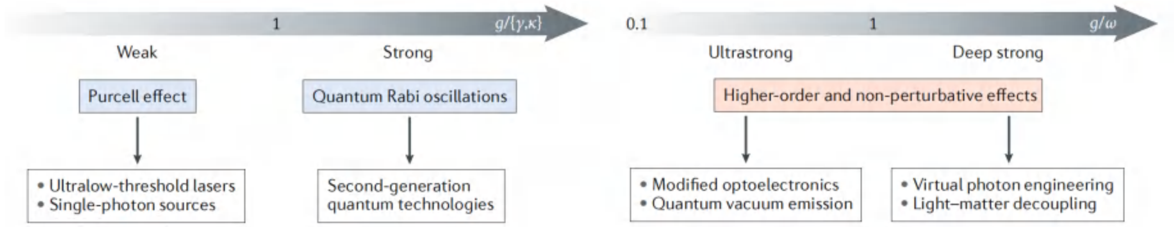

图 2: 光与物质相互作用的分隔区间[1]

超导量子电路是由超导的电容、电感、约瑟夫森结等构成的，在超低温下表现出宏观量子效应[3]，国内外对超导量子电路的研究一直都是物理学中的热点，而对其超强耦合的探究更是热点中的热点。面对国家科技战略需求和科技强国的规划，国内目前的研究成果还远远没有达到国家的需求，研究之路道阻且长。

自从超强耦合体系被提出后，国内外对这个课题研究的人员在不断的增加。在过去的二十年中，大量的科学家推动了这个领域的发展，在实验获得了越来越大的光-物质耦合强度，使超强耦合体系在理论和实验上都进入了量子光学的前沿。Cristiano Ciuti 在 2005 年预测，由于量子阱中平行子带之间的跃迁涉及大量电子，这种被命名为超强耦合态的态可以在子带间极化激元中观察到[4]。2009 年，Aji A. Anappara 等人在微腔嵌入的掺杂 GaAs 量子阱中首次在实验中观测到超强耦合态[5]。一年之后 Pol Forn-Diaz 等人在超导电路实验中实现了 USC，此时，实验对象并非是一个集体激励，而是一个单一的两能级系统[6-7]。在 2016 年，两个独立的实验实现了光-物质相互作用强度的质的飞跃[8]，通过 Josephson 结作为耦合单元，将理论边界推入非扰动超强耦合域。2017 年，Sal J. Bosman 通过高阻抗微波谐振器首次实现了 transmon qubit 的超强耦合[9]，这将成为本文的讨论对象之一。同时，对人造原子与一维波导的电磁连续体相耦合的探索也已经开始[10]。

本项目主要基于超导量子电路，讨论了超导量子比特的构建以及与谐振器的耦合，并求解了超强耦合下的拉比模型以及动力学演化过程，从而对超导量子电路中的超强耦合与新奇现象进行讨论分析，并尝试做出相应预测。详细来讲，我们通过利用量子比特与谐振器的耦合相互作用，探索了超导量子电路中的超强耦合产生机制，并通过求解 Jaynes-Cummings 模型与 Rabi 模型，对比分析了在传统光与物质相互作用中未曾详细讨论的超强耦合所引起的新奇现象，实现了超强耦合区间下的 Bell 态的制备，并提出了另一种可行的方法。

2 光场量子化

2.1 电磁场量子化

光的波粒二象性是上世纪初科学家们讨论的重要议题。狄拉克[11]将光的波和粒子性质结合起来，使光场能够解释所有干涉现象。本节中，我们将从经典的电磁场出发，将电磁场的每个模式与一个量子化的谐振子联系起来，将电磁场进行量子化。所谓电磁场的量子化，就是把描述电磁场的物理量用算符表示，把电磁场的状态用态矢量或密度算符表示。

在经典电动力学中，一个无源的电磁场可以用麦克斯韦方程组进行描述：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}&=0,\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0,\\ \nabla\times\mathbf{E}&=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \nabla\times\mathbf{H}&=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1}$$

首先讨论谐振腔中的电磁场量子化，也就是电磁场的驻波解。考虑一维电磁场，如图3所示，电磁场在长度为 L 的谐振腔中传播，电场延 x 方向偏振。

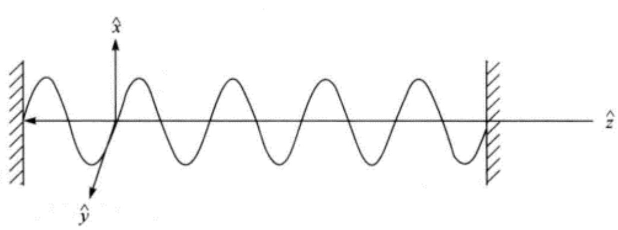

图 3: 一维电磁场

将 E_x 用简正模展开，

$$E_x=\sum_l A_l q_l(t)\sin(k_l z).\tag{2}$$

其中 k_l 满足驻波条件

$$k_l=\frac{l\pi}{L},\quad l=0,1,2,3\cdots.\tag{3}$$

q_l 为具有长度量纲的矢量，A_l 为待定常数。

将 E_x 代入麦克斯韦方程组，得到 B_y 的表达式：

$$B_y=\frac{1}{c}\sum_l\frac{A_l}{\omega_l}\frac{p_l(t)}{m_l}\cos(k_l z),\tag{4}$$

其中 $p_l(t)=m_l\dot{q}_l$。计算得到经典电磁场的哈密顿量：

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}v \left(\varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu}B_y^2\right) \\
&= \sum_l \frac{V\varepsilon_0 A_l^2}{2m_l\omega_l}\left(\frac{1}{2}m_l\omega_l^2 q_l^2 + \frac{p_l^2}{2m_l}\right).
\end{aligned} \tag{5}
$$

由于 A_l 是待定常数，我们令 $\frac{V\varepsilon_0 A_l^2}{2m_l\omega_l}=1$，得到

$$
H = \sum_l \left(\frac{1}{2}m_l\omega_l^2 q_l^2 + \frac{p_l^2}{2m_l}\right). \tag{6}
$$

我们可以看出，上式将电磁场的哈密顿量表示为独立谐振子能量之和，因此场的每一种模式在动力学上等价于一个谐振子。我们通过将 q_l 和 p_l 看作服从以下对易关系的算符，就可以实现对电磁场的量子化：

$$
[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}. \tag{7}
$$

引入湮灭算符 a_l 和产生算符 $a_l^\dagger$

$$
\begin{aligned}
a_l(t) &= a_l e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2m_l\hbar\omega_l}}\left[m_l\omega_l q_l(t) + ip_l(t)\right], \\
a_l^\dagger(t) &= a_l^\dagger e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2m_l\hbar\omega_l}}\left[m_l\omega_l q_l(t) - ip_l(t)\right].
\end{aligned} \tag{8}
$$

可以得到电磁场一维驻波的形式

$$
\begin{aligned}
E_x &= \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\varepsilon_0}}\sin(k_l z)\left[a_l(t) + a_l^\dagger(t)\right], \\
B_y &= \frac{i}{c}\sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\varepsilon_0}}\cos(k_l z)\left[a_l(t) - a_l^\dagger(t)\right].
\end{aligned} \tag{9}
$$

哈密顿量为

$$
H = \hbar\omega_l\left(a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2}\right). \tag{10}
$$

接下来，我们考虑自由空间的电磁场，模的空间分布是连续的，能量分布也是连续的。为了对行波进行量子化，我们一般需要引入一个过渡的边界条件，先对连续的

模式近似成分立的模式求和，在将求和化为积分。这里直接给出结果

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= i\sum_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{e}_\sigma\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2V\varepsilon_0}}\left[a_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}-a^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right],\\ \boldsymbol{B} &= i\sum_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{e}_{\boldsymbol{k}}\times\hat{e}_\sigma\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2V\varepsilon_0c^2}}\left[a_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}+a^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right].\end{aligned}\tag{11}$$

2.2 光子数表象

在量子力学中，处理一般谐振子问题的时候，我们使用占有数表象，也称为粒子数表象，在处理光子问题时，我们也称为光子数表象。设 $|\,n\,\rangle$ 为对应于能量本征值 E_n 的能量本征态，即

$$H\,|\,n\,\rangle=\hbar\omega_l\left(a_l^\dagger a_l+\frac{1}{2}\right)|\,n\,\rangle=E_n\,|\,n\,\rangle\,.\tag{12}$$

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar v.\tag{13}$$

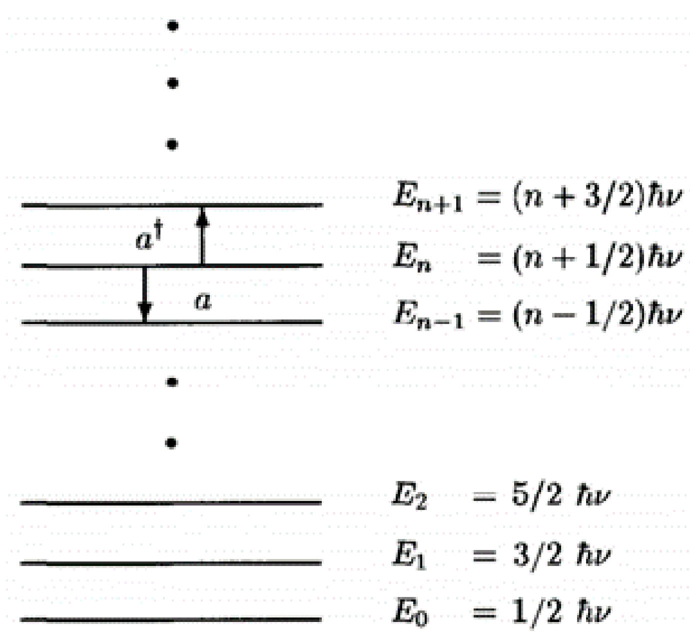

图 4: 光子数表象中的能级

将湮灭算符和产生算符作用在本征态上，可以得到

$$
\begin{aligned}
a\,|\,0\,\rangle &= 0, \\
a\,|\,n\,\rangle &= \sqrt{n}\,|\,n-1\,\rangle\,, \\
a^\dagger\,|\,n\,\rangle &= \sqrt{n+1}\,|\,n+1\,\rangle\,.
\end{aligned} \tag{14}
$$

再将产生算符作用在式 (14) 第二等式的两边，可以得到

$$
a^\dagger a\,|\,n\,\rangle = n\,|\,n\,\rangle\,. \tag{15}
$$

可以看出

$$
n = a^\dagger a. \tag{16}
$$

则可以称 $a_l^\dagger a_l$ 为粒子数算符。

3 光与原子的相互作用

引入二能级原子的两个本征态，即基态（下能级态）$|g\rangle$ 和激发态（上能级态）$|e\rangle$，并引入上跃算符 $|\sigma_+\rangle$、下跃算符 $|\sigma_-\rangle$、泡利算符 $|\sigma_z\rangle$，由下式给出：

$$\begin{aligned} |\sigma_+\rangle &= |e\rangle\langle g|, \\ |\sigma_-\rangle &= |g\rangle\langle e|, \\ |\sigma_z\rangle &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \end{aligned} \tag{17}$$

其中，$|\sigma_z\rangle$ 也称为原子布居差算符。

可以写出二能级原子在无相互作用情形下的哈密顿量：

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_e}{2}|e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\omega_g}{2}|g\rangle\langle g| = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z. \tag{18}$$

并且利用先前推导出的量子光场中的电磁场：

$$E = i\sum_{k,\sigma} e_\sigma\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}}[a_{k,\sigma}e^{ik\cdot r} - a^\dagger_{k,\sigma}e^{-ik\cdot r}] = \sum_{k,\sigma} e_\sigma E_0 \sin(k\cdot r)(a_{k,\sigma} - a^\dagger_{k,\sigma}). \tag{19}$$

代入二能级原子的哈密顿量，得

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a). \tag{20}$$

其中，$g_{eg,\sigma} = -\left(\frac{d_{eg}\cdot e_\sigma E_0}{\hbar}\right)\sin(k\cdot r)$ 为耦合强度常数，令 $d_{eg} = d_{ge} = \mu$，则

$$g = g_{eg,\sigma} = g_{ge,\sigma} = -\left(\frac{\mu\cdot e_\sigma E_0}{\hbar}\right)\sin(k\cdot r). \tag{21}$$

观察式 (20) 最后一项发现，$\sigma_+ a$ 表示原子吸收一个光子而从下能态跃迁到上能态；$a^\dagger\sigma$ 表示原子从上能态跃迁到下能态而发出一个光子；$a^\dagger\sigma_+$ 表示原子从下能态跃迁到上能态的同时发出一个光子；$\sigma_- a$ 表示原子从上能态跃迁到下能态的同时吸收一个光子。

实际物理过程中，只有能量相近的能级和状态之间的转化才是重要的，相应物理量随时间变换较慢，探测器可以测量到其随时间变化的变化行为。相反，能量相差较大的能级和状态之间的转化频率非常大，超过了探测器的响应时间，只能给出平均的效果。

当耦合系数较小的时候，$a^\dagger\sigma$ 与 $\sigma_- a$ 项为快速振荡项，可以采取旋转波近似，这

样近似得到的模型称为 JC（Jaynes-Cummings）模型，而不作近似的模型称为 Rabi 模型。

在光与物质相互作用的领域，耦合系数一般较低，位于弱耦合或强耦合区域，而想要达到超强耦合或深强耦合，需要构建人工原子与人工光场，超导量子电路就是一种很好的载体。

4 谐振器

为构造人工原子 (量子比特)，首先应当获取一个能级系统，在电路量子电动力学 (Circuit QED) 中，一种十分经典的方式是利用 LC 电路；而量子比特之间相互作用用时一般会与谐振器耦合，简单的 LC 谐振器是十分经典的一种耦合方式，2D 的谐振器能够提供更多的模式，因此现在基本采用 2D 谐振器进行耦合。因此为保证文章的连续性，我们在此对谐振器进行一并讨论。

4.1 LC 谐振器

对于 LC 电路，由于在室温下，其此时的能量远远大于自身的本征能级差，因此在电子学中使用时并不会对其引入量子化，可以认为其能量是连续的。

但在极低温的环境下，由于系统能量接近其基态能量，LC 谐振器可以产生一个十分优异的能级系统。LC 谐振器的示意图如图5所示。

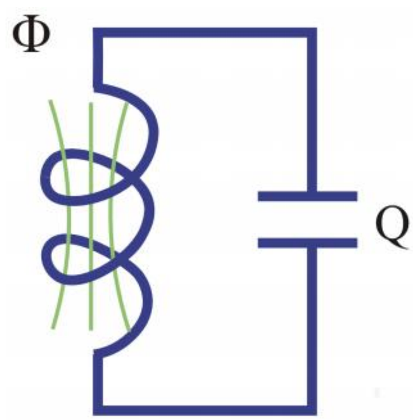

图 5: LC 谐振电路

可以定义电感上的磁通 Φ，则此时电容两端电压差值满足 $V = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$，我们可以很轻易地写出其拉氏量

$$L = \frac{C\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{\Phi^2}{2L}, \tag{22}$$

以及正则动量

$$p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi} = CV = Q. \tag{23}$$

可知，Q 和 Φ 为一对正则变量，其泊松括号满足

$$\{\Phi, Q\} = 1. \tag{24}$$

则利用量子化，即可得到其哈密顿以及对易关系为

$$\hat{H}=\frac{\hat{\Phi}^2}{2L}+\frac{\hat{Q}^2}{2C},\left[\hat{\Phi},\hat{Q}\right]=i\hbar. \tag{25}$$

可以发现，其与经典谐振子十分相似，则定义产生湮灭算符

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger &= \tfrac{1}{\sqrt{2\hbar Z_r}}\left(\hat{\Phi}-iZ_r\hat{Q}\right),\\ \hat{a} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\hbar Z_r}}\left(\hat{\Phi}+iZ_r\hat{Q}\right),\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $Z_r=\sqrt{L/C}$ 为特征阻抗，则可写出其在占有数表象下的哈密顿量

$$\hat{H}=\hbar\omega_r\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_r\left(\hat{n}+\frac{1}{2}\right). \tag{27}$$

其中 $\omega_r=1/\sqrt{LC}$ 为其角频率，可见其能级也是等间距的，如图6所示。

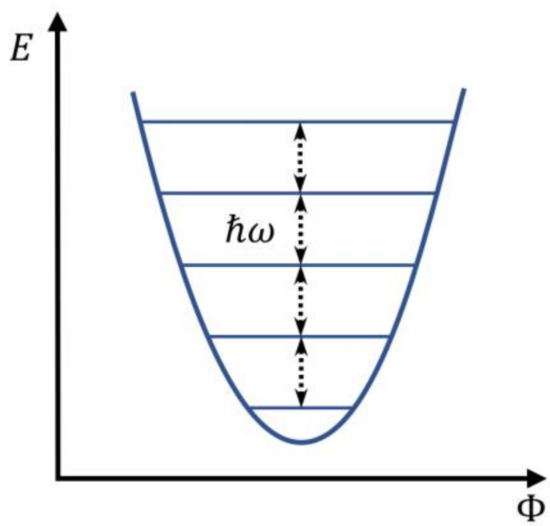

图 6: LC 谐振子能级分布

至此我们构造了一种能级结构，可以用于与量子比特进行耦合，但其还是不能作为量子比特的，因为此时非常难进行精确调控，倘若我们对基态谐振子提供一个 $\hbar\omega_r$ 的能量，其不仅可以跃迁到 1 态，并且可以继续吸收能量向较高的布居数态进行跃迁。因此，必须引入非线性能级，从而将某些态分隔开来，从而构建我们想要的二能级系统，一种十分典型的非线性元件即为约瑟夫森结，将在第三部分进行介绍。

4.2 2D 谐振器

量子器件工作时其频率量级一般在 GHz，我们之前说过，量子谐振器有许多形式，LC 振荡器只是一种形式，在电路 QED 中，实际上还有微波谐振器，我们在此讨论 2D 谐振器。

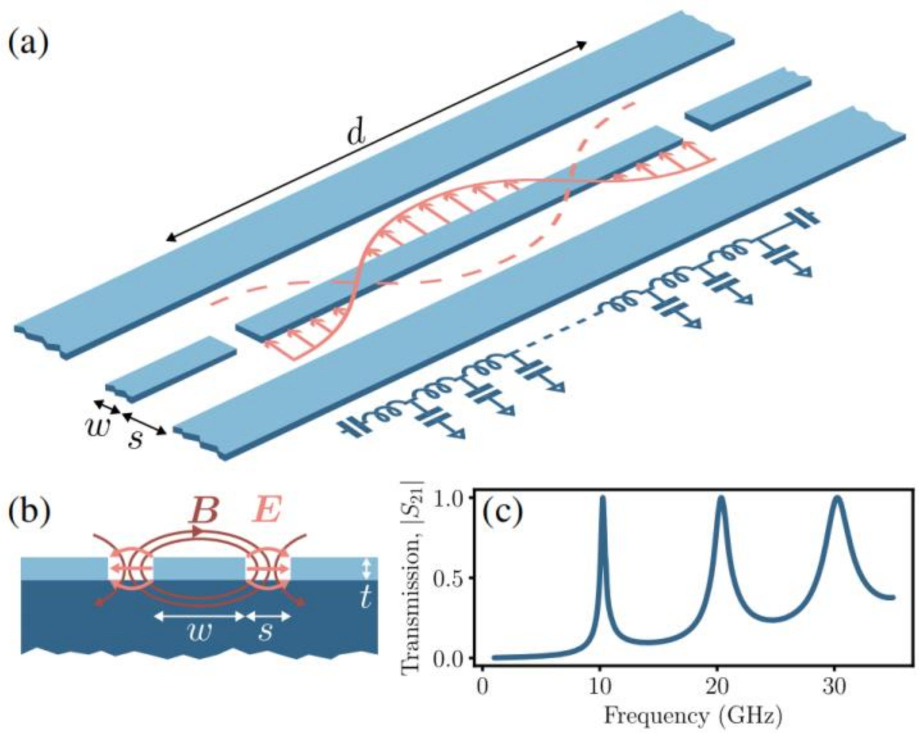

图 7: 共面波导谐振器[12]

如图7(a) 所示，一个共面波导谐振器包括一个有限长度 d 的共面波导，以及两侧的无限大接地导体在一个衬底上构成。中心导体厚度为 t，宽度为 ω，两侧与厚度相同的无限大接地导体之间的间距为 s，其横截面为图7(b) 所示。通过调节这些参数，同同轴电缆一样，共面波导可以将电磁场限制在中心导体和地面之间的一个小体积内，并使得电磁场集中在中心导体与接地导体之间，减小其他方向的辐射。共面波导在微波工程学中有着广泛的应用[13]。

与 LC 振荡器一样，共面波导谐振器的电磁性质可用其特性阻抗 $Z_0 = \sqrt{l_0/c_0}$, 波导中的光速 $v_0 = 1/\sqrt{l_0 c_0}$，其中 c_0 为单位长度接地电容，l_0 为单位长度电感。

谐振器是由共面波导通过在间隔为距离 d 的两个端点上施加零电流或零电压的边界条件而形成的。零电流可以通过在中心导体上制造一个细小间隙形成的 (开放边界)，而零电压可以通过接地来实现 (短路边界)。对于两端具有开放边界的谐振器，如上图 (a) 所示，其基频为 $f_0 = v_0/2d$，谐波 $f_m = (m+1)f_0$，称为 $\lambda/2$ 谐振器。对于一段开放一端短路的谐振器，其基频为 $f_0 = v_0/4d$，称为 $\lambda/4$ 谐振器。

事实上，谐振器的多模态也起着重要作用，我们考虑利用标准方法对其利用经典描述进行量子化。

对于在电路 QED 中相关的小信号，共面波导谐振器可以用线性、无色散的一维介质来建模。其电报机模型如图8所示。

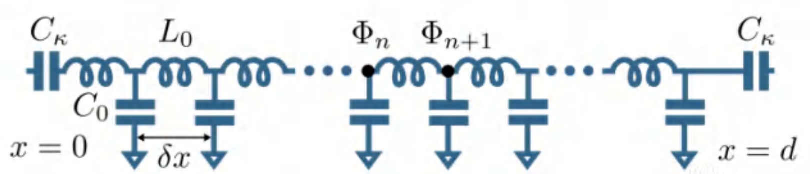

图 8: 电报机模型[12]

可以很形象地想象出，中心导体的电感可以用一系列电感元件串联表示，而对地的电容可以用平行的组合表示。利用磁通写出其能量，每个电容为 $E_{cn}=Q_n^2/2C_0$，而电感 $E_{Ln}=\left(\Phi_{\mathrm{n+1}}-\Phi_n\right)^2/2L_0$，其中 Φ_n 为第 n 个结点的磁通，而 Q_n 为该结点对应的共轭变量。

利用标准方法可以得到其经典的哈密顿量为

$$H=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{Q_n^2}{2C_0}+\frac{\left(\Phi_{\mathrm{n+1}}-\Phi_n\right)^2}{2L_0}\right]. \tag{28}$$

而导体是连续的，因此我们考虑用连续极限的方式对其进行操作，单位间隔 $\delta x\to 0$，则可以轻易地知道 $C_0=c_0\delta x$ 和 $L_0=l_0\delta x$，并且定义连续的磁通 $\Phi\left(x_n\right)=\Phi_n$ 和电荷密度 $Q\left(x_n\right)=Q_n/\delta x$，则考虑将求和转变为积分，可得

$$H=\int_0^d dx\left\{\frac{1}{2c_0}Q(x)^2+\frac{1}{2l_0}\left[\partial_x\Phi(x)\right]^2\right\}. \tag{29}$$

其中利用了 $\partial_x\Phi\left(x_n\right)=\lim_{\delta x\to 0}\left(\Phi_{n+1}-\Phi_n\right)/\delta x$，而电荷 $Q(x,t)=c_0\partial_t\Phi(x,t)$ 为广义通量 $\Phi(x,t)=\int_{-\infty}^t dt'V\left(x,t'\right)$ 的正则动量，其中 $V\left(x,t'\right)$ 是中心导体上的接地电压。

利用正则方程, 可以简单地推出其运动方程即为波动方程

$$v_0^2\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}=0, \tag{30}$$

其中 $v_0=1/\sqrt{l_0c_0}$ 为导体中的光速。可以利用分离变量的形式简单解出

$$\Phi(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(x)\Phi_m(t). \tag{31}$$

对于某个单模，有 $\ddot{\Phi}_m=-\omega_m^2\Phi_m$ 和 $u_m=A_m\cos\left(k_mx+\varphi_m\right)$，其中 φ_m 以及 k_m 利用

边界条件确定。

利用模态的正交归一性，我们可以通过单模分解的方式写出其哈密顿量

$$H=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{Q_m^2}{2Cr}+\frac{1}{2}C_r\omega_m^2\Phi_m^2\right]. \tag{32}$$

其中 $C_r=dc_0$ 为总电容，而 $Q_m=C_r\dot{\Phi}_m$ 为 Φ_m 的共轭电荷量。可以轻易地看出，哈密顿为独立谐振子的能量和。因此我们同样利用之前的量子化方式，可以轻易地写出

$$\begin{aligned}\hat{a}_m^{\dagger}&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_m}}\left(\widehat{\Phi}_m-iZ_m\hat{Q}_m\right),\\ \hat{a}_m&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar Z_m}}\left(\widehat{\Phi}_m+iZ_m\hat{Q}_m\right),\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $Z_m=\sqrt{L_m/C_r}$ 为模态 m 的特征阻抗，而 $L_m^{-1}\equiv C_r\omega_m^2$ 。即可写出简洁的哈密顿形式

$$\widehat{H}=\sum_{m=0}^{\infty}\hbar\omega_m\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m. \tag{34}$$

对于 $\lambda/2$ 谐振器，$\omega_m=(m+1)\omega_0$ 为模态频率，而 $\omega_0/2\pi=v_0/2d$ 为基模频率。

通过将约瑟夫森结直接接入谐振器的中心导体，即可使得谐振器呈现非线性变化。并且将量子比特连接在中央导体与接地导体之间可以实现两者的相互作用，我们将在第 6 部分进行介绍。

5 约瑟夫森结

5.1 约瑟夫森效应

超导量子电路的最基本的元件是约瑟夫森结，其超导性使得构成的电路 Qubit 不包含电阻，从而不会使得振荡衰减, 其是实现人造原子的最基本的材料[2]。

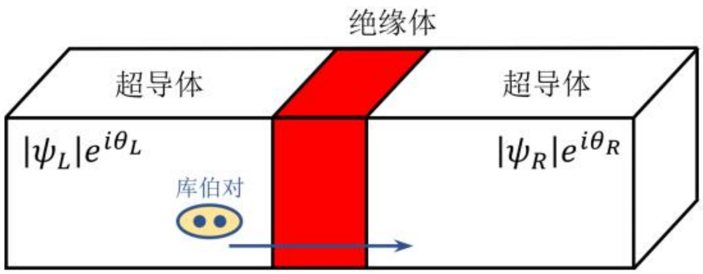

图 9: 约瑟夫森结

如图9所示，约瑟夫森结是由两个超导体中间夹一个绝缘薄层所形成的类似的三明治结构，绝缘层起着势垒的作用。由于绝缘层较薄，所以两侧的超导体形成了弱耦合，其会产生一些特性:

(1) 直流约瑟夫森效应:

当外电压为 0 时，S-I-S 结内会一直存在由库伯对遂穿形成的无阻超导电流

$$I_s = I_c \sin(\phi). \tag{35}$$

其中 $\phi = \phi_2 - \phi_1$ 为两端相位差，I_c 称为临界电流，与约瑟夫森结的具体参数有关。

(2) 交流约瑟夫森效应:

两端加偏置电压 V 后，库伯对遂穿形成的超导电流会变成交流的超导电流，此时由

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}, \tag{36}$$

可知相位差频率满足

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar} = \frac{2\pi V}{\Phi_0}, \tag{37}$$

其中 $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ 为磁通量子，则超导电流满足

$$I_s(t) = I_c \sin(\omega t + \phi_0) = I_c \sin(\phi). \tag{38}$$

此时约瑟夫森结具有等效电感

$$L_J = \frac{V}{\dot{I}} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos(\phi)}. \tag{39}$$

可见其等效电感通过 $\cos(\phi)$ 被电压和电流所控制，为非线性电感，在 LC 电路中用其代替电感即可获得非等间距能级。利用上式即可得出约瑟夫森结所携带的能量为

$$E = \int IV dt = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int I \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \int \sin(\phi) d\phi = E_J[1 - \cos(\phi)]. \tag{40}$$

也可写成 $E = -E_J \cos(\phi)$, 其与上式等价。其中 $E_J = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi}$ 称为约瑟夫森结能量, 经常作为约瑟夫森器件中的能量尺度。

5.2 理论推导

我们利用超导理论以及一些技巧简单地导出约瑟夫森效应。

超导体可以用一个波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 描述，其演化规律与薛定谔方程形式相似，由 Fritz London 引入[14]。

假设有大量库伯对 (Cooper pair) 同时处于基态时，将系统用宏观波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$ 描述，宏观波函数归一化为 $\int \Psi^* \Psi d^3\vec{r} = N_S$，$N_S$ 为库伯对总数，并有

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = n(\vec{r}, t), \tag{41}$$

其中 $n(\vec{r}, t)$ 为 Cooper pair 密度 (即单位体积内 Cooper pair 的数量)。因此可设

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\theta(\vec{r}, t)}, \tag{42}$$

其中 $\theta = \theta(\vec{r}, t)$ 为相位分布。$\Psi(\vec{r}, t)$ 演化满足

$$i\hbar \partial_t \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla + q\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2 \Psi(\vec{r}, t) + q\phi(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t). \tag{43}$$

其中 $m = 2m_e$ 为库伯对质量，$q = -2e$ 为库伯对电量，$\phi(\vec{r}, t)$ 为电势分布，$\vec{A}(\vec{r}, t)$ 为矢势分布，$V(\vec{r}, t)$ 为非电磁势能分布。而 $\hat{p} = -i\hbar \nabla + q\vec{A}$ 为带电粒子的机械动量，可知其和薛定谔方程形式完全相同。

并且可以得出超导体内部电流密度表达式:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{J_S}(\vec{r},t) &= -\frac{ne\hbar}{m_e}\nabla\theta(\vec{r},t) - \frac{2ne^2}{m_e}\vec{A}(\vec{r},t) \\ &= -\frac{2ne^2}{m_e}\left[\frac{\hbar}{2e}\nabla\theta(\vec{r},t) + \vec{A}(\vec{r},t)\right].\end{aligned} \tag{44}$$

接下来在已有的假设以及结论下推导约瑟夫森效应。首先假设约瑟夫森结具有柱状对称性，从而简化其为一维模型，可以将绝缘体视为一个分布在 $(-a,a)$ 的有限大势垒，从而利用有限深方势阱的模型，进行求解。

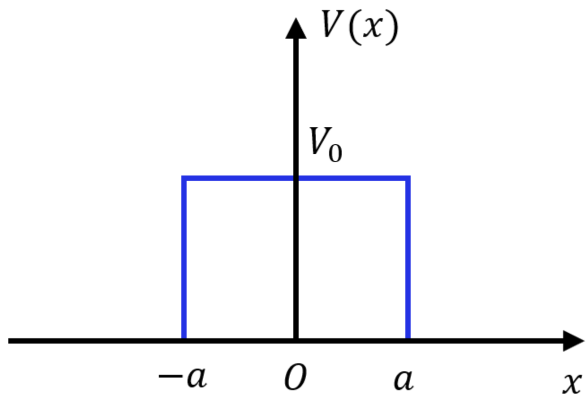

图 10: 有限深方势阱模型

在无外加磁场下，对方程 (43) 进行分离变量，$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}$，可得

$$\varepsilon_0\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x). \tag{45}$$

其中由 $\varepsilon_0 = \frac{m_e}{2ne^2}\frac{J_0^2}{2n}$。在势垒范围内有

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = (\varepsilon_0 - V_0)\,\psi. \tag{46}$$

设方程通解形式为

$$\psi(x) = C_1\cosh(x/b) + C_2\sinh(x/b), \tag{47}$$

其中 $b = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0-\varepsilon_0)}}$ 。在 $V_0 > \varepsilon_0$ 的情况下，将没有经典电流通过约瑟夫森结，只有超流。由于两侧为超导体，可知其波函数边界条件为

$$\begin{aligned}\Psi(-a,t) &= \sqrt{n_1}e^{i\theta_1}, \\ \Psi(a,t) &= \sqrt{n_2}e^{i\theta_2}.\end{aligned} \tag{48}$$

将边界条件代入通解，可得

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\sqrt{n_2}e^{i\theta_2}+\sqrt{n_1}e^{i\theta_1}}{2\cosh(a/b)},\\
C_2 &= \frac{\sqrt{n_2}e^{i\theta_2}-\sqrt{n_1}e^{i\theta_1}}{2\sinh(a/b)}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

利用量子力学中的几率流密度以及经过一些简单的运算[15]，可以求出绝缘体内的超流大小:

$$
\overrightarrow{J_S} = \overrightarrow{J_C}\sin\left(\theta_1-\theta_2\right). \tag{50}
$$

其中 $\overrightarrow{J_C}=\frac{e\hbar\sqrt{n_1 n_2}}{m_e b\sinh(2a/b)}\hat{x}$ 为临界电流密度。但上式并不满足规范不变性，故我们考虑加入电磁场后对其进行修正。

考虑规范变换 $\overrightarrow{A'}=\overrightarrow{A}+\nabla\xi,\phi'=\phi-\frac{\partial\xi}{\partial t}$ ，由于 $\overrightarrow{J_S}$ 应为规范不变量，根据 (44) 式 θ 应满足相应规范变换 $\theta'=\theta-\frac{2e}{\hbar}\xi$ 。则式 (50) 需要被修改来满足规范不变。设 $\overrightarrow{J_S}=\overrightarrow{J_C}\sin\varphi$ ，其中 $\varphi(\vec{r},t)$ 满足规范不变。设其修改后形式为 $\varphi=\theta_1-\theta_2+f(\vec{r},t)$ ，则

$$
\begin{aligned}
\varphi'=\varphi=\theta_1-\theta_2+f &= \theta_1'-\theta_2'+\frac{2e}{\hbar}\left(\xi_1-\xi_2\right)+f\\
&= \theta_1'-\theta_2'+\frac{2e}{\hbar}\int_{1\to 2}\nabla\xi\cdot d\vec{l}+f\\
&= \theta_1'-\theta_2'+f'.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

可以求得修正项 f 的表达式应为

$$
f(\vec{r},t)=-\frac{2e}{\hbar}\int_{1\to 2}\vec{A}(\vec{r},t)\cdot d\vec{l}. \tag{52}
$$

因此规范不变相位的表达式应为

$$
\varphi(\vec{r},t)=\theta_1(\vec{r},t)-\theta_2(\vec{r},t)-\frac{2e}{\hbar}\int_{1\to 2}\vec{A}\cdot d\vec{l}. \tag{53}
$$

修正后的约瑟夫森电流关系为

$$
\overrightarrow{J_S}=\overrightarrow{J_C}\sin\varphi. \tag{54}
$$

对式 (44) 进行求导，并代入波函数随时间演化的系数关系可得

$$
\frac{\partial\theta(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m_e}{2ne^2}\frac{J_S^2(\vec{r},t)}{2n}-2e\phi(\vec{r},t)\right). \tag{55}
$$

并且对修正后的相位进行时间偏导，带入上式可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi V}{\Phi_0}. \tag{56}$$

即我们之前说的交流约瑟夫森效应。至此，我们推导了约瑟夫森结这种非线性元件的 V-I 关系。

5.3　等效电路

在 3.1 部分中可以看到，一方面由于约瑟夫森结具有一个等效的非线性电感，可以视为一个非线性的振子；另一方面，约瑟夫森结的“三明治结构”也会导致其自身存在一个等效电容 C_J，再考虑上结的结电阻耗散的情况下，我们可以将约瑟夫森节等效为一个非线性可变电感 L_J 与一个固定电容 C_J、固定电阻 R(可忽略) 的并联，如图11所示。

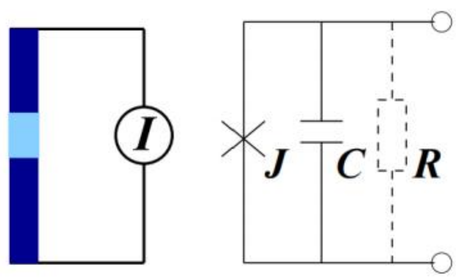

图 11: 约瑟夫森结等效模型[16]

由此可知，在忽略电阻的情况下，根据基尔霍夫电流定律，电路的总电流 I 可以写为

$$I = I_s + C_J\dot{V} = I_c \sin\phi + C_J\ddot{\Phi}, \tag{57}$$

其中相位差 ϕ 与总磁通量 Φ 的关系满足 $\phi = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}$。接着我们类比拉格朗日力学的逻辑分析，分别写出这个电路动能项与势能项，最后得到它的哈密顿量。

约瑟夫森结的动能项是由结电容的静电能构成

$$K\left(\dot{\phi}\right) = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C_J\dot{\phi}^2}{2}. \tag{58}$$

通过约瑟夫森结非线性电感的电流提供了势能项，在我们外加恒定直流偏置的情况下，可以得到它的势能曲线大致如图12所示。

$$U(\phi) = E_J(1-\cos\phi) - \frac{\hbar}{2e}I\phi. \tag{59}$$

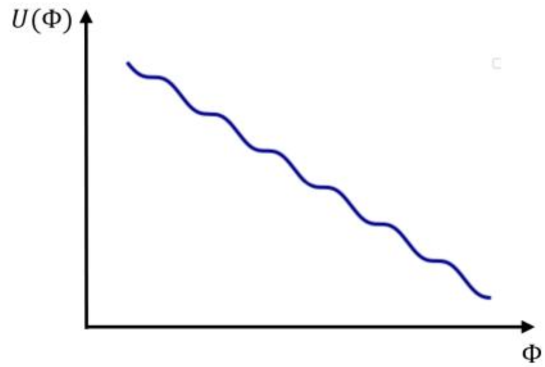

图 12: 约瑟夫森结势能曲线

这样，我们便可以通过动能与势能之差得到拉格朗日量（以相位差 ϕ 为广义坐标）

$$L\left(\phi,\dot{\phi}\right)=\frac{\hbar^2\dot{\phi}^2C_J}{8e^2}-E_J\left(1-\cos\phi\right)+\frac{\hbar}{2e}I\phi. \tag{60}$$

接着，我们对上面的方程进行量子力学的推广[17]，并且引入库伯对数量算符 n，满足 $n=\frac{q}{2e}$，正则动量可写为

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2C_J\dot{\phi}=\frac{\hbar CV}{2e}=\frac{\hbar q}{2e}=n\hbar, \tag{61}$$

则哈密顿量可以由下式得到

$$H\left(p,\phi\right)=p\dot{\phi}-L=\frac{2e^2}{C_J\hbar^2}p^2+E_J\left(1-\cos\phi\right)+\frac{\hbar}{2e}I\phi. \tag{62}$$

类似地我们可以得到系统中一些物理量的算符对应：

$$\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi},\ \hat{q}=-2ei\frac{\partial}{\partial\phi},\ \hat{n}=-i\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{63}$$

相应的也有对易关系

$$\left[\hat{\phi}_i,\hat{p}_i\right]=i\hbar, \tag{64}$$

利用库伯对数量算符即可写成

$$\left[\hat{\phi}_i,\hat{n}_i\right]=i. \tag{65}$$

至此，我们得到了约瑟夫森结的哈密顿量以及量子体系下的各种算符，便于后面构造电路使用。

6 超导量子干涉仪

超导量子干涉仪 (Superconducting Quantum Interference Device, SQUID) 是一种十分典型的量子器件,直流 SQUID(dc-SQUID) 为一个等效约瑟夫森结,而射频 SQUID(rf-SQUID) 为一个简单的磁通量子比特，在此我们先引入两种 SQUID，便于量子比特的设计。

6.1 直流 SQUID

在一个约瑟夫森节构成的系统中，它的拉格朗日量（哈密顿量）中的参数只有约瑟夫森结电容 C_J 与约瑟夫森结能量 E_J，当这两个参数确定下来后，系统的哈密顿量便是完全确定的。如图，我们可以构建直流超导量子干涉环路，在理论上人为构造一个各个参数可调的约瑟夫森结。

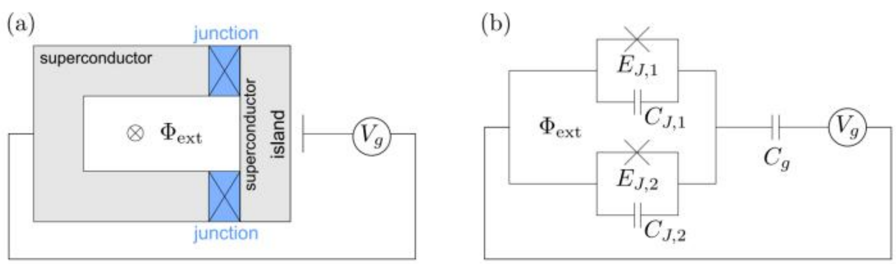

图 13: 直流 SQUID 电路模型[18]

可以看出与单个电流偏置相比，这里新的物理特征是在于双结的有效约瑟夫森能量对穿过 SQUID 环路的磁通量具有一定的依赖性。

具体来说,考虑电路中磁通量所设的方向,电路中总的磁通量应有如下关系 $-\Phi_1+\Phi_2+\Phi_L+\Phi_{ext}=0$. 而对于一个小的 dc-SQUID 电路自感 L 通常可以舍去，因此可以取 $\Phi_L\approx 0$，可以得到该电路的等效拉格朗日量为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}C_{J,2}\dot{\Phi}_1^2+\frac{1}{2}C_{J,1}\dot{\Phi}_1^2+E_{J,1}cos\Phi_1+E_{J,2}cos\Phi_2+\frac{1}{2}\frac{1}{L}\Phi_L^2 \\ &\approx \frac{1}{2}C_{J,2}\dot{\Phi}_1^2+\frac{1}{2}C_{J,1}\dot{\Phi}_1^2+E_{J,1}cos\Phi_1+E_{J,2}cos\Phi_2. \end{aligned} \tag{66}$$

为了将电路总磁通量的约束以另一种更直观的形式体现出来，我们做以下的变量替换

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi+\frac{1}{2}\Phi_{\rm ext}, \\ \Phi_2 &= \Phi-\frac{1}{2}\Phi_{\rm ext}. \end{aligned} \tag{67}$$

变量替换后，拉格朗日量可以写为

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\left(C_{J,1}+C_{J,2}\right)\left(\dot{\Phi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(C_{J,1}-C_{J,2}\right)\dot{\Phi}\dot{\Phi}_{ext} \\ & +\frac{1}{8}\left(C_{J,1}+C_{J,2}\right)\left(\dot{\Phi_{\text{ext}}}\right)^2+E_J\left(\Phi_{ext}\right)\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}-\varphi\right). \end{aligned} \tag{68}$$

其中

$$\begin{aligned} E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right) &= \sqrt{\left(E_{J,1}\right)^2+\left(E_{J,2}\right)^2+2E_{J,1}E_{J,2}\cos\left(2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0\right)}, \\ \varphi &= \arctan\left(\tan\left(\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0\right)\frac{E_{J,2}-E_{J,1}}{E_{J,2}+E_{J,1}}\right). \end{aligned} \tag{69}$$

一般情况下,若我们考虑两个并联的约瑟夫森结是对称的情况（$E_{J,1}=E_{J,2}, C_{J,1}=C_{J,2}$），则 φ 消失，该电路的等效 E_J 可以表示为：

$$E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right)=\sqrt{2E_J^2+2E_J^2\cos\left(2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0\right)}. \tag{70}$$

则对称的 dc-SQUID 的有效约瑟夫森能量作为外加磁通量 Φ_{ext} 的函数图像如图14所示，其拉格朗日量可以简化为

$$L=\frac{1}{2}C\left(\dot{\Phi}\right)^2+E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right)\cos\left(2\pi\Phi/\Phi_0\right). \tag{71}$$

可以看到，利用 dc-SQUID 我们实现了约瑟夫森结能量参数 E_J 的可调节性，其具体函数关系如上式 $E_J(\Phi_{ext})$ 所示，实验中我们只需调节对电路施加的磁通量 Φ_{ext} 便可以对该约瑟夫森结系统的各项参数进行统一调节，故很多时候我们经常以 dc-SQUID 替换约瑟夫森结以获得更易调控的电路系统。

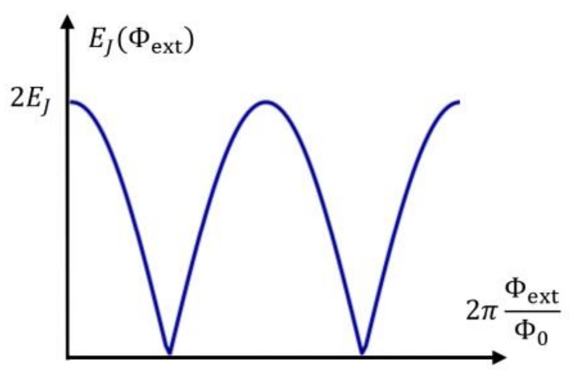

图 14: 对称 dc-SQUID 的有效约瑟夫森结能量与外加磁通的关系曲线

6.2 射频 SQUID

射频 SQUID 也是一个重要的超导回路，其是由一个插入超导回路的约瑟夫森结构成的，如图15所示。

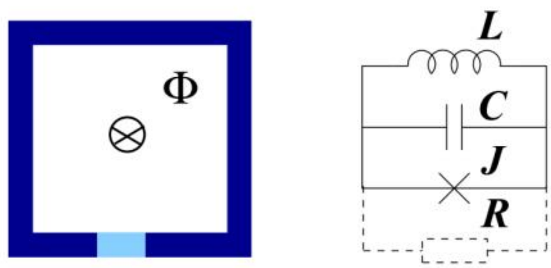

图 15: 射频超导量子干涉仪[16]

该电路引入了约瑟夫森结的磁通偏置，为描述电路，我们引入与电感 L 相关的电流

$$I_L = \frac{\hbar}{2eL}(\phi - \phi_e)\ ,\ \phi_e = \frac{2e}{\hbar}\Phi_e. \tag{72}$$

其中 Φ_e 是穿过 SQUID 外部的磁通，我们可以利用基尔霍夫定理写出

$$\frac{\hbar}{2e}C\ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR}\dot{\phi} + I_c \sin\phi + \frac{\hbar}{2eL}(\phi - \phi_e) = 0. \tag{73}$$

在没有耗散的情况下，其拉格朗日量为

$$L\left(\phi, \dot{\phi}\right) = \frac{\hbar^2\dot{\phi}^2}{4E_C} - E_J(1 - \cos\phi) - E_L\frac{(\phi - \phi_e)^2}{2}\ . \tag{74}$$

对于磁通量子数为整数或 $\phi_e = 2n\pi$ 的偏置，势能在 $\phi = \phi_e$ 处有一个绝对极小值，如图16实线；对于磁通量子数为半整数的偏置，势能有两个简并极小值，如图16虚线。

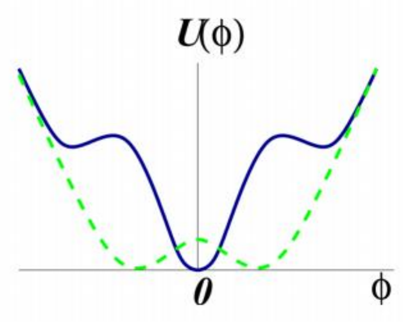

图 16: rf-SQUID 势能图[16]

事实上。利用其半整数偏置即可构造出一个简单地磁通量子比特，将会在后面论述到。

7 超导量子比特

超导量子比特是量子计算中的重要组成部分，其基本原理是利用超导体的量子效应来实现量子比特的储存、演化和测量。目前，约瑟夫森结是实现超导量子比特的主要方法之一。前文所述的约瑟夫森结的电学性质随温度降低呈现出明显的量子行为，通过控制约瑟夫森结的大小和电流，可以实现对量子比特的操控和读取。

正如我们之前所述，约瑟夫森结以及其包含的电路可以利用结的相位 ϕ 以及库伯对数量 n 来表述的，其满足正则对易关系 $\left[\hat{\phi},\hat{n}\right]=i$，则其也满足不确定关系 $\Delta\phi\Delta n\geq 1$。若此时电荷能量远大于结的能量时 $(E_C\gg E_J)$，我们称约瑟夫森结工作于电荷区，此时电荷数是准确的，库伯对数量为好量子数，且结的相位差波动很大；若约瑟夫森结的能量占据主导地位 $(E_J\gg E_C)$，我们称其工作在相位区，则此时结的相位差是准确的，磁通量子是好量子数；在中间状态下 $(E_J\ E_C)$，电荷与相位有着同样的重要性。

超导量子比特有着三种基本类型，其量子态的物理性质不同，分别为电荷量子比特 (Charge Qubit)、磁通量子比特 (Flux Qubit)、相位量子比特 (Phase Qubit)。电荷量子比特由通过约瑟夫森结连接到超导电极的超导岛组成，在电荷区下工作，电路的量子态是岛上的离散电荷数。磁通量子比特是一个超导环路，由约瑟夫森结中断，磁通量在其中被量化。它是在相位区下工作的，因此交叉点上的相位是明确的。相位量子比特也在相位区下操作的。它由一个电流偏置的约瑟夫森结组成，该结具有对应于其约瑟夫森结上不同相位状态的量子态。

实际上，还有其他类型的量子比特电路，其对上述基本类型进行了优化，能够减小退相干引起的对噪声的耦合，比如 quantronium 和 transmon qubits。接下来我们对典型的量子比特进行详细推导。

7.1 电荷量子比特

电荷量子位由超导岛（库伯对盒）组成，该岛通过约瑟夫森结耦合到超导电极，并且通过电容耦合到控制超导岛电荷能量的偏置栅极。其中岛的充电能量 E_C 占据主导，$E_C\gg E_J$，并且量子态对应于岛上库伯对的数量。其结构如图17所示

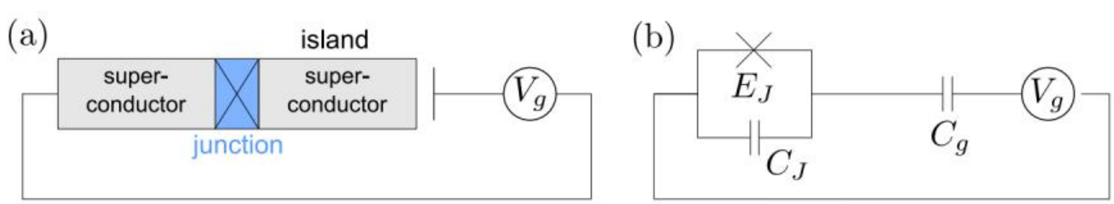

图 17: 电荷量子比特结构示意图[18]

我们可以写出其系统拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}C_J\left(\dot{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{2}C_g\left(\dot{\Phi} - V_g\right)^2 + E_J\cos(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}). \tag{75}$$

其中磁通 $\Phi = \Phi_0\phi/2\pi$，正则动量为

$$p = C_J\dot{\Phi} + C_g(\dot{\Phi} - V_g). \tag{76}$$

则可得其哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2C_\Sigma}\left(p - C_gV_g\right)^2 - E_J\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \tag{77}$$

其中 $C_\Sigma = C_J + C_g$。我们可以利用库伯对数量算符描述这个体系，结合 $p = 2en$ 可以写出

$$H = \frac{4e^2}{2C_\Sigma}\left(n - n_g\right)^2 - E_J\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \tag{78}$$

其中 $n_g = C_gV_g/2e$，并且我们可以利用产生湮灭算符可以得出

$$e^{\pm i\phi}|\, n\rangle = |\, n \pm 1\rangle\,. \tag{79}$$

则我们可以将哈密顿量利用库伯对算符写为

$$H = \sum_n E_C\left(n - n_g\right)^2|n\rangle\langle n| - \frac{1}{2}E_J(|n+1\rangle\langle n| - |n-1\rangle\langle n|). \tag{80}$$

其中 $E_C = 4e^2/2C_\Sigma$。

而电荷能量为 $E_C\left(n - n_g\right)^2$ 随着 n_g 二次变化，故对于固定数量的库伯对，电荷能量与 n_g 为以 N 为中心的抛物线，正如图18的虚线所示。

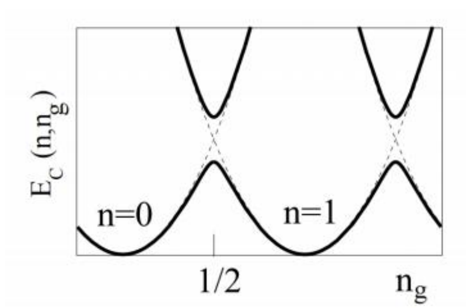

图 18: 电荷能量随着 n_g 与 n 的变化[19]

如果 n_g 接近于 N，则此时电荷能量较小，且状态 $|N\rangle$ 为基态，当其不断充电，n_g 大于 $N+1/2$ 后，一对库伯对通过约瑟夫森结发生隧穿，进入超导岛，状态 $|N+1\rangle$ 变为基态。

则考虑简并点 $n_g=1/2$ 附近，此时超导电路满足 $E_C \gg E_J$，约瑟夫森结的能量 E_J 相当于扰动，此时约瑟夫森结工作在电荷区附近，较弱的约瑟夫森结耦合了两个态，修改了本征能级，正如上图实线所示。此时最低的两个能级能量接近，其之间的能量差远小于第三个能级与他们的能量差，即此时可以很好地将最低的两个能态与其余能态区分，从而利用这两个能态构成二能级系统，此时有

$$H = E_C\left(n_g\right)^2 |0\rangle\langle 0| + E_C\left(1-n_g\right)^2 |1\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}E_J(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|). \tag{81}$$

我们可以利用泡利矩阵简单地写出哈密顿量的形式，取 $|0\rangle = (1,0)^T$ $|1\rangle = (0,1)^T$ 则

$$H = -\frac{1}{2}E_C\left(1-2n_g\right)\sigma_z - \frac{1}{2}E_J\sigma_x. \tag{82}$$

其中 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为泡利矩阵。

由于 SQUID 具有可协调约瑟夫森能量 $E_J = E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right)$，我们可以将其对约瑟夫森结替换，电路如图19所示

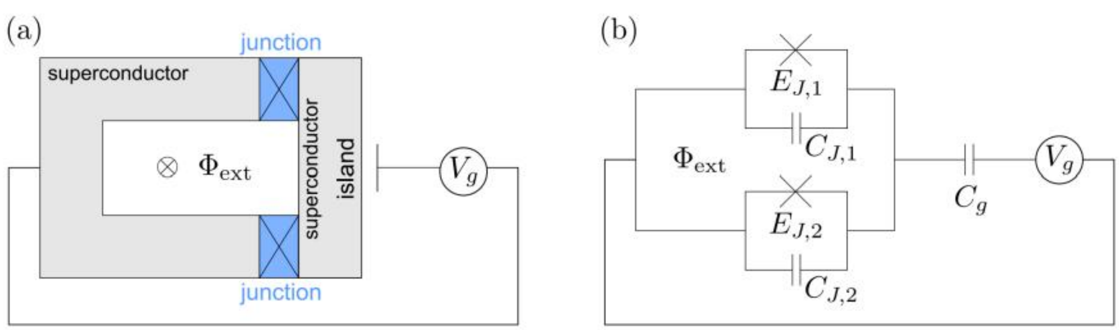

图 19: 用 SQUID 替换后的 Charge Qubit[18]

则此时哈密顿量为：

$$H = -\frac{1}{2}E_C\left(1-2n_g\right)\sigma_z - \frac{1}{2}E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right)\sigma_x. \tag{83}$$

其中对于对称的 SQUID 有

$$E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right) = E_J\sqrt{2+2\cos(2\pi\Phi_{ext}/\Phi_0)}, \tag{84}$$

是外加磁通的函数，这样可以形成可调电路，更便于对电路进行操作。

7.2 Transmon 量子比特

因为超导量子比特对来自内在与外在的退相干因素很敏感，所以它的相干时间不长。外在退相干因素，比如局部电磁场环境，可以通过合理的设计超导量子电路以及减弱外界环境来进行改善。然而，内在的低频噪声很难从根本上消除，所以超导电路的内在因素限制了相干时间的延长。

对于超导电荷量子比特，最主要的噪声来自于电荷涨落，比如材料衬底表面与氧化层约瑟夫森结表面的电荷涨落；对超导磁通和相位量子比特，主要的噪声来自于磁通涨落。为了改善各种噪声对超导量子比特的影响，各种改进型的超导量子比特也在最近被设计出来并实验验证。其中 transmon 量子比特就是一种主要的改进型超导量子比特。

其结构与电荷量子比特一致，只是此时结的工作区域不再位于电荷区，其势能如图20所示。

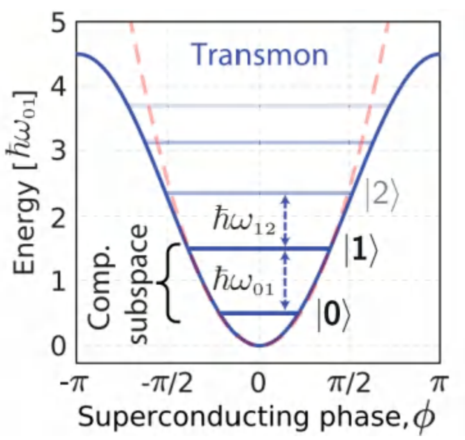

图 20: transmon 量子比特的余弦势阱 (实线) 与 LC 振荡器的二次势阱 (虚线) 的比较[20]

事实上，正如之前所说，上述的电路形式与电压偏置的电荷量子比特一致，因此我们直接写出其哈密顿量。在 $C_g \ll C_\Sigma = C_J + C_s$ 条件下，利用一些近似即可类似得到

$$\hat{H}_T = \frac{\left(\hat{Q} - Q_g\right)^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\hat{\Phi}\right) = 4E_C\left(n - n_g\right)^2 - E_J \cos\left(\phi\right). \tag{85}$$

其中 $\hat{n} = \hat{Q}/2e$，相位算符 $\phi = (2\pi/\Phi_0)\,\hat{\Phi}$，电荷能量 $E_C = e^2/2C_\Sigma$，偏置电荷数 $n_g = Q_g/2e$，而偏置电荷可以由我们无法不想要的外部环境扰动或施加的电压偏置 $V_g = Q_g/C_g$ 所得到。

$\hat{H}_T$ 的能谱是通过 E_J/E_C 来调控的，分别对应三种量子比特：

(1) 在 $E_J/E_C \ll 1$ 时，对应电荷量子比特；

(2) 在 $E_J/E_C \approx 1$ 时，对应 quantronium；

(3) 在 $E_J/E_C \gg 1$ 时，对应 transmon 量子比特。

其不同能量比下的能谱如图21所示，展示了在库伯对数表象下，最低的三个能级的能谱。

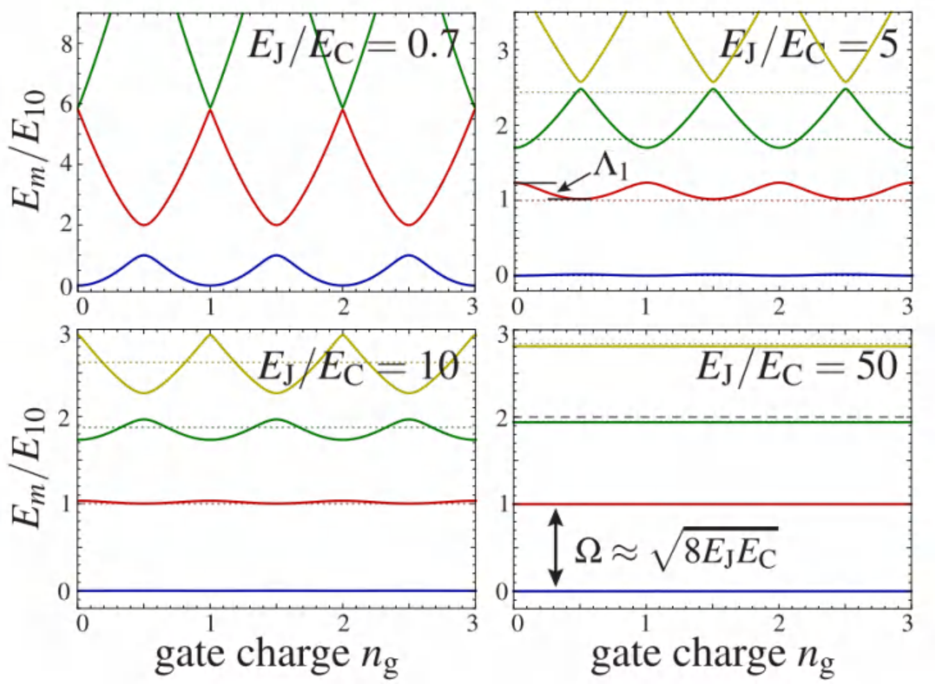

图 21: 不同能量比下的 Transmon Qubit 能谱[21]

在电荷能量占据主导的情况下，结可以视为微扰，此时即为 $\hat{n}$ 的能级，而栅极电荷的变化对系统会产生较大的影响，因此电路环境中不可避免的电荷波动会导致 Qubit 跃迁频率的波动，从而导致退相干。

为解决退相干问题，正如我们之前所述，此时可以增大 E_J/E_C，典型值在 20-80 的区间内，此时结的能量较大，Qubit 偏离电荷工作区，其能级随着栅极电荷的改变也越来越小，因此也可以实现更久的相干时间。

但是，在增强退相干的同时，我们可以看出，Transmon 的非谐调性也降低了，而这种非协调性是我们控制量子比特不引起高激发态所必须的，但实际上，非谐调性的损失可以通过 $(E_J/E_C)^{-1/2}$ 给出。事实上，由于相干性的增加，我们仍然能够高保真地对 transmon 进行调控。我们考虑在 $E_J/E_C \gg 1$ 的条件下对 $\hat{H}_T$ 进行简化，由于此时电荷自由性较大，因而其共轭变量 $\Delta\hat{\phi} \ll 1$，并且由于低能级对 n_g 并不敏感，我们

可以考虑利用 Taylor 展开以及一些近似，可以得到

$$H_q \approx 4E_C\hat{n}^2 + \frac{1}{2}E_J\phi^2 - \frac{1}{4!}E_J\phi^4. \tag{86}$$

其中我们去掉了一些常数项，因为其对能级间距以及演化过程并没有很大的影响。

同样我们将前两项进行对角化，

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \left(\frac{2E_C}{E_J}\right)^{\frac{1}{4}}\left(b^\dagger + b\right), \\ \hat{n} &= \frac{i}{2}\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{\frac{1}{4}}\left(b^\dagger - b\right).\end{aligned} \tag{87}$$

以上形式即可清晰地表明正则变量随着 E_J/E_C 变化的波动趋势，利用以上算符我们可以轻易地写出

$$H_q = \hbar\omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2}b^\dagger b^\dagger bb. \tag{88}$$

其中 $\hbar\omega_q = \sqrt{8E_CE_J} - E_C$，并且仅保留了具有相同产生湮灭算符的项，因为若产生湮灭算符数量不等，其会高频震荡，而会被迅速平均掉因而被忽略。

7.3 磁通量子比特

当非线性电感的能量占主导地位时，即 $E_J \gg E_C$，磁通量成为了好量子数。对于之前推导的 rf-SQUID，我们可以得到其哈密顿量

$$H(Q,\Phi) = \frac{Q^2}{2C_J} - E_J\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + \frac{(\Phi - \Phi_{ext})^2}{2L}. \tag{89}$$

利用结的相位 ϕ 以及库伯对数量 n 来表述，其哈密顿量可写为

$$H(n,\varphi) = E_Cn^2 - E_J\cos\phi + \frac{E_L(\phi - \phi_{ext})^2}{2}. \tag{90}$$

当 $\phi_{ext} = \frac{\pi}{2}$ 时，其势能函数为

$$U = U_0\left[\frac{1}{2L}\left(\frac{2\pi(\Phi - \Phi_{ext})}{\Phi_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right]. \tag{91}$$

在此时，可以发现来自环路的自感和约瑟夫森结的非线性电感的贡献，使得其势能图像具有两个相同能级的势阱，如图22所示。

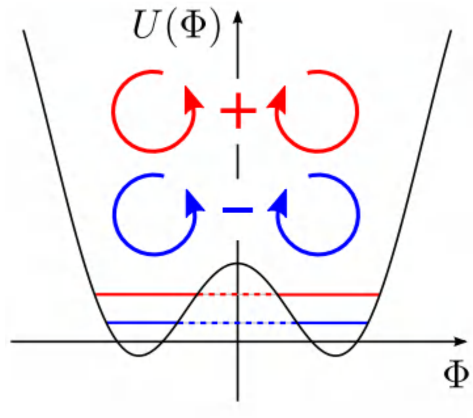

图 22: $\phi_{ext} = \frac{\pi}{2}$ 时的 rf-SQUID 势能函数[18]

此时左右井即可构成两种量子态，而为了达到在电势的局部最小值中只包含少数量子态的状态，它需要有一个相对较大的环的自感。这就需要一个大的回路，这固有地增加了回路对环境通量噪声的灵敏度，并使量子叠加的退相干时间变短。

为了减小环路尺寸及其对环境的敏感性，同时保持足够的自感，研究人员在 1999 年提出了三结磁通量子比特，如图23所示。

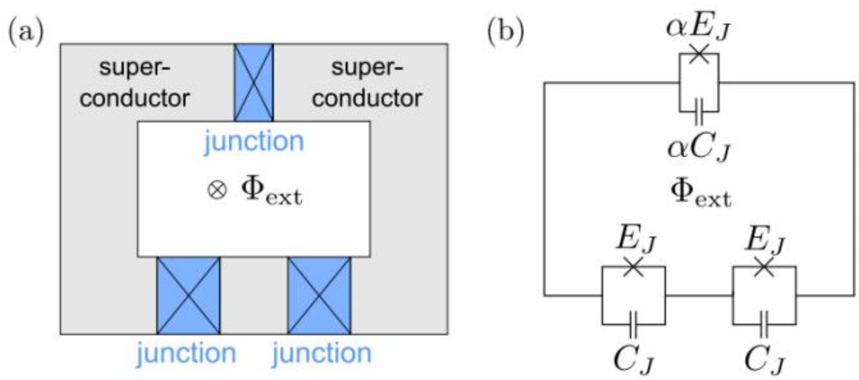

图 23: 三结磁通量子比特[18]

其中一个结的面积比另两个结要小 α 倍。结合磁通条件 $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_{\text{ext}}$ ，令 $\Phi_p = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$、$\Phi_m = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$，其拉氏函数可以写为

$$L = \frac{P_p^2}{2C_p} + \frac{P_m^2}{2C_m} - U(\Phi_p, \Phi_m). \tag{92}$$

其中, P_p 与 P_m 为 Φ_p 与 Φ_m 的正则动量，势能函数为

$$U\left(\Phi_p, \Phi_m\right)=E_J\left[2+\alpha-2 \cos \left(\frac{2 \pi}{\Phi_0} \Phi_p\right) \cos \left(\frac{2 \pi}{\Phi_0} \Phi_m\right)-\alpha \cos \left(\frac{2 \pi}{\Phi_0}\left(\Phi_{\text{ext}}-\Phi_p\right)\right)\right]. \tag{93}$$

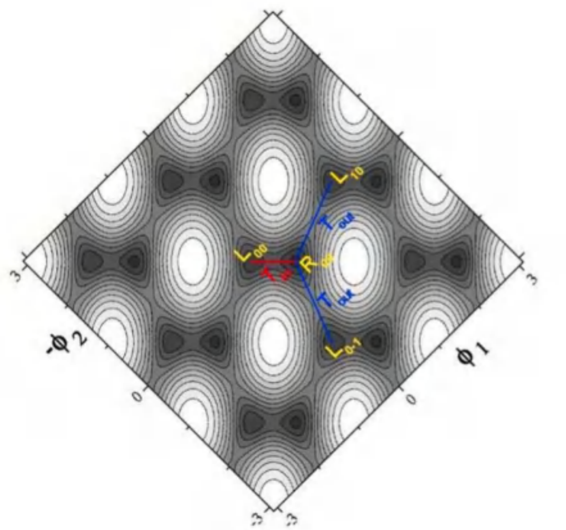

图 24: 三结磁通量子比特势能图像[16]

绘制势能函数图像如图24所示。我们可以看到, 其同样具有双势阱结构。当 $\phi_{ext}=\frac{\pi}{2}$ 时，两个量子态处于简并态，可通过隧穿效应进行消除，从而得到由两个势阱波函数叠加而来的基态。设两个量子态分别为左态 $|L\rangle$ 和右态 $|R\rangle$，分别表示左阱和右阱中的束缚通量态，则二能级哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \langle L|H\,|L\rangle & \langle L|H\,|R\rangle \\ \langle R|H\,|L\rangle & \langle R|H\,|R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_L & \Delta \\ \Delta & \epsilon_R \end{pmatrix} \\ &= \frac{\epsilon_L-\epsilon_R}{2}\sigma_z+\frac{\epsilon_L+\epsilon_R}{2} I+\Delta \sigma_x \\ &= \epsilon\left(\Phi_{\text{ext}}\right)\sigma_z+\Delta \sigma_x . \end{aligned} \tag{94}$$

其中 $\epsilon\left(\Phi_{\text{ext}}\right)=\left(\epsilon_l-\epsilon_p\right)/2$ 为两个势阱态间能级差, 可用 Φ_{ext} 调节，Δ 为 $\Phi_{ext}=\Phi_0/2$ 时的隧穿速率。

7.4 相位量子比特

一个有电流偏置的约瑟夫森结电路如图25所示，其等效的电路模型可以由右图描述，可以得到其能级局部最小值近似为三次方，因此可能会具有相对较大的非谐性。

我们可以调整电路参数，使得电路能量的局部最小值附近只有几个量子态；由于频率不匹配，前面提到的非谐性会使得两个最低的两个量子态与局部最小值中的其他束缚态隔离，从而可以有效地形成量子二能级系统。这样形成的二能级系统便称为相位量子比特。

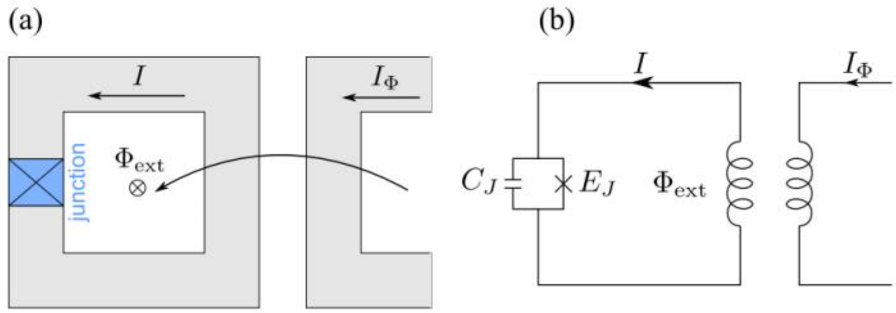

图 25: 相位量子比特结构示意图及其等效模型[18]

上图原理中的直流电流偏置是由通过环路的磁通量电磁感应实现的。而为了使得只有少数量子态位于局部最小值之中，这个感应偏置电流 I_b 应当十分接近临界电流 I_C，在这种情况下，该系统的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}C_J\dot{\Phi} - E_J[1 - \cos{(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0})}] + I_b\Phi. \tag{95}$$

其势能项表示为

$$U\left(\Phi\right) = -E_J\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - I_b\Phi. \tag{96}$$

而在局部最小值点 $\Phi = \Phi_m$ 附近，将势能作为 Φ 的函数进行泰勒展开到三阶，有以下形式

$$U\left(\Phi\right) \approx U\left(\Phi_m\right) + \frac{dU\left(\Phi\right)}{d\Phi}|_{\Phi=\Phi_m}\left(\delta\Phi\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2U\left(\Phi\right)}{d^2\Phi}|_{\Phi=\Phi_m}\left(\delta\Phi\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3U\left(\Phi\right)}{d^3\Phi}|_{\Phi=\Phi_m}\left(\delta\Phi\right)^3. \tag{97}$$

而在局部最小值点 $\Phi = \Phi_m$ 满足 $\frac{dU(\Phi)}{d\Phi}|_{\Phi=\Phi_m} = 0$，即有：

$$E_J\frac{2\pi}{\Phi_0}\sin{(2\pi\frac{\Phi_m}{\Phi_0})} = I_b. \tag{98}$$

由此定义临界电流 $I_C = 2\pi\frac{E_J}{\Phi_0}$，带入化简可得三次方近似下的势能表达式，以及函数示意图如图26所示。

$$U\left(\Phi\right) = U_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 E_J\sqrt{1 - \left(\frac{I_b}{I_C}\right)^2}\left(\delta\Phi\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^3 E_J\frac{I_b}{I_C}\left(\delta\Phi\right)^3. \tag{99}$$

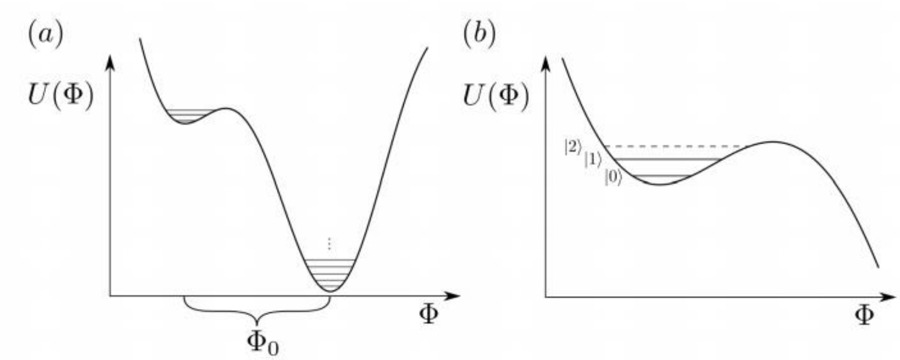

图 26: 相位量子比特能级调控示意图[18]

由此可以得到这种情况下的势垒高度：

$$\Delta U\left(I_b\right) = U\left(\Phi_{peak}\right) - U_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} E_J \left(1 - \frac{I_b}{I_C}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{100}$$

类比于谐振子，在这个体系下的“质量”相当于等效电容 C_J，由此可以得到该系统的震荡频率：

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_J C_J}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \sqrt{\frac{E_J}{C_J}} \left(1 - \left(\frac{I_b}{I_C}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{101}$$

并由此可以确定能级间隔 $\hbar\omega_p$。如果我们选择合适的参数，使得势垒高度略大于能级间距，就可以使得势阱内部的量子态大幅减少，从而使势阱中两个能量最低的状态形成一个孤立二能级系统。

至此,我们完成了三种经典的量子比特的推导以及电荷量子比特的改进模型 transmon 量子比特的推导。

8 量子比特与谐振器的相互作用

8.1 Transmon 量子比特与谐振器之间的相互作用

现如今，transmon 量子比特由于其较好的抗退相干能力，使用十分广泛，我们在此推导其与谐振器的相互作用。

8.1.1 Transmon 量子比特与 LC 谐振器

首先考虑 transmon 量子比特与单模谐振器相互作用，其示意图如27所示。

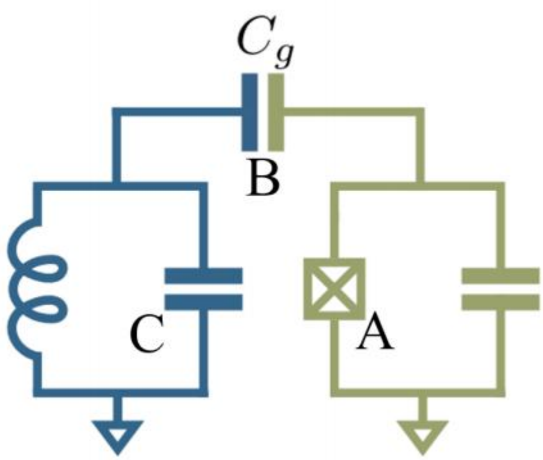

图 27: Transmon 与 LC 谐振器耦合[12]

列出基尔霍夫方程以及元件的运动方程

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_C + \dot{\Phi}_B - \dot{\Phi}_A = 0, \\ I_A = -I_B, \\ I_B = I_C, \\ I_C = C\ddot{\Phi}_C + \tfrac{\Phi_C}{L} \\ I_B = C_g\ddot{\Phi}_B. \end{aligned} \tag{102}$$

可得

$$C\ddot{\Phi}_C + \frac{\Phi_C}{L} = C_g(\ddot{\Phi}_A - \ddot{\Phi}_C). \tag{103}$$

从而利用拉氏量之和 $L = L_T + L_{LC}$，可以写出

$$\begin{aligned} L_{LC} &= \frac{C}{2}{\Phi_C}^2 + \frac{1}{2L}{\Phi_C}^2, \\ L_T &= \frac{C_\Sigma}{2}\dot{\Phi}_A^2 + \frac{C_g}{2}(\dot{\Phi}_A - \dot{\Phi}_C)^2 + E_J\cos\ (\phi_A). \end{aligned} \tag{104}$$

我们利用矩阵形式，即 $\Phi^T = (\Phi_A, \Phi_C)$、$Q^T = (Q_A, Q_C) = (C_A\dot{\Phi}_A, C_C\dot{\Phi}_C)$ 以及 $C = \begin{pmatrix} C_\Sigma + C_g & -C_g \\ -C_g & C + C_g \end{pmatrix}$，可以写出其动能部分

$$K = \frac{1}{2}\cdot^T C\cdot = \frac{1}{2}Q^T C^{-1} Q. \tag{105}$$

则哈密顿量可写为

$$H = \frac{1}{2\bar{C}^2}\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_\Sigma + C_g & -C_g \\ -C_g & C + C_g \end{pmatrix}(Q_A, Q_C) + V, \tag{106}$$

其中 $\bar{C}^2 = C_\Sigma C + C_\Sigma C_g + CC_g$。在 $C_g \ll C_\Sigma, C$ 的限制下，可以得到

$$\begin{aligned} H &\approx \frac{1}{2C_\Sigma C}\left[CQ_A^2 + C_\Sigma Q_C^2 + C_g\left(Q_A + Q_C\right)^2\right] + V \\ &= \frac{Q_A^2 + \frac{C_g}{C}\left(Q_A + Q_C\right)^2}{2C_\Sigma} + \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q_C^2}{2C} - E_J\cos\left(\phi_A\right) \\ &\approx \frac{\left(Q_A + \frac{C_g}{C}Q_C\right)^2}{2C_\Sigma} + H_{LC} - E_J\cos\left(\phi_A\right). \end{aligned} \tag{107}$$

其中 $H_{LC} = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q_C^2}{2C}$ 是 LC 谐振器的哈密顿量，此时定义 $\hat{n} = \hat{Q}_A/2e$，$\hat{n}_r = \left(\frac{C_g}{C}\right)\hat{Q}_C/2e$，即可得到一个易于推广的哈密顿量

$$H = 4E_C\left(\hat{n} + \hat{n}_r\right)^2 + \hbar\omega_r a^\dagger a - E_J cos\phi_A. \tag{108}$$

即为单模 LC 谐振器与 transmon 量子比特耦合的哈密顿量。

8.1.2 Transmon 量子比特与 2D 谐振器

我们之前说过，对于 transmon 量子比特，其需要电容上的能量较小，因此对应大电容，可以将其耦合到一个共面波导谐振器上，并且此时多模谐振器能够提供更多的振动模式，从而可以与多种振动频率的 transmon 量子比特进行耦合。其耦合结构如图28所示，即将 transmon 量子比特接入中央导体与接地的无限大导体之间。

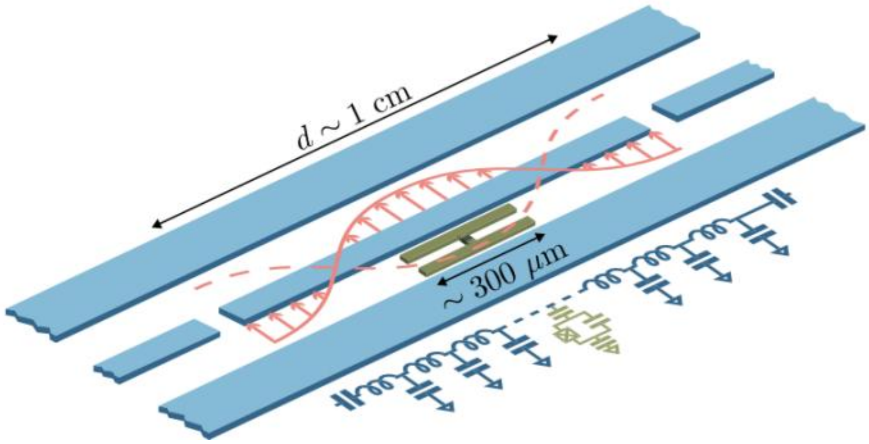

图 28: Transmon 与共面波导谐振器耦合[12]

我们将单模谐振器的方程进行推广，利用之前的推导可知，有 $\hat{n}_r = \Sigma_m \hat{n}_m$、$\hat{n}_m = \frac{C_g}{C_m} \cdot \frac{\hat{Q}_m}{2e}$，从而得到 $H_{LC} = \Sigma_m \hbar\omega_m a_m^\dagger a_m$，则总的哈密顿为

$$H = 4E_C\left(\hat{n} + \hat{n}_r\right)^2 + \Sigma_m \hbar\omega_m a_m^\dagger a_m - E_J cos\phi_A. \tag{109}$$

我们假设 transmon 量子比特的振荡频率与多模谐振器的某个模式频率十分相近，即对于 $m \geq 1$ 有 $|\omega_0 - \omega_q| \ll |\omega_m - \omega_q|$，此时可以采用单模近似，简化为与 ω_r 的单模谐振子耦合

$$\begin{aligned} H_r =& 4E_C\left(\hat{n} + \hat{n}_r\right)^2 + \hbar\omega_r a^\dagger a - E_J \cos\phi_A \\ =& \hbar\omega_r a^\dagger a + 8E_r \hat{n} \cdot \hat{n}_r + 4E_C n_r^2 + 4E_C n^2 - E_J \cos\phi_A. \end{aligned} \tag{110}$$

其中这四项分别代表 $H_{LC} = \hbar\omega_r a^\dagger a$、相互作用能 $8E_r \hat{n} \cdot \hat{n}_r$、高阶项忽略 $4E_C n_r^2$、和 transmon 的哈密顿量 $H_q = 4E_C n^2 - E_J \cos\phi_A$。

代入参数 $Z_r = \frac{1}{\omega_r C}$、$E_C = \frac{e^2}{2C_\Sigma}$、$R_k = \frac{h}{e^2}$、$\hat{n} = \frac{i}{2e}\frac{C_g}{C}\sqrt{\frac{\hbar}{2Z_r}}\left(a^\dagger - a\right)$ 可得

$$8E_r \hat{n} \cdot \hat{n}_r = -\hbar\omega_r \frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\pi Z_r}{R_k}}\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{\frac{1}{4}}\left(a^\dagger - a\right)\left(b^\dagger - b\right). \tag{111}$$

则耦合系数 $g = \omega_r \frac{C_g}{C}\sqrt{\frac{\pi Z_r}{R_k}}\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{\frac{1}{4}}$，带入产生湮灭算符即可得

$$\hat{H} = \hbar\omega_r a^\dagger a + \hbar\omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2} b^\dagger b^\dagger b b - \hbar g\left(ab + a^\dagger b^\dagger + ab^\dagger + a^\dagger b\right). \tag{112}$$

即为耦合的哈密顿量。

在耦合系数远小于 ω_r 和 ω_q 时，非旋转波项 (CRT= $ab + a^\dagger b^\dagger$) 可以忽略，仅剩下旋转波项 (RWA= $ab^\dagger + a^\dagger b$)，采用旋转波近似，从而即可得到 JC 模型。而对于超强耦

合区域，此项不可忽略，即为 Rabi 模型。

其在不同的耦合区间内会产生不同的动力学演化过程，通过相互作用即可调控量子比特，从而实现量子比特的调控。

8.2 磁通量子比特与谐振器之间的相互作用

若想更容易地实现超强耦合，应当对谐振器与量子比特进行优化，一种较为容易的实现方式为利用非均匀超导传输线谐振器与磁通量子比特耦合，其耦合示意图如29所示。

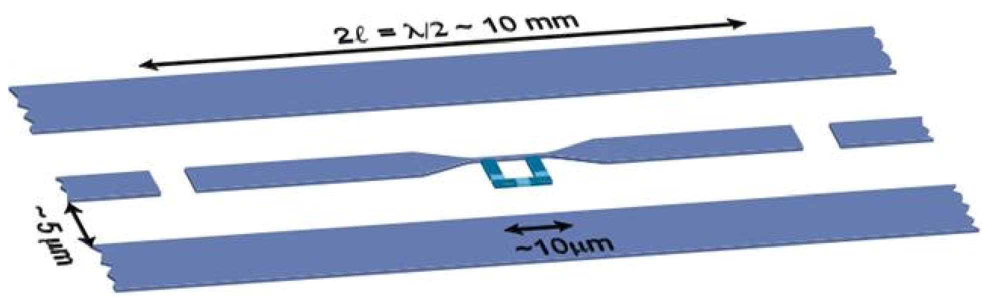

图 29: 连接到非均匀超导传输线谐振器的三结磁通量子比特[22]

其中传输线谐振器的长度为 $2l$，类似于先前对 2D 谐振器的推导，此时也可以得到一致的结果，首先写出其拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{tl}} = \frac{C^0(x)\dot{\psi}^2(x,t)}{2} - \frac{1}{2L^0(x)}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right)^2. \tag{113}$$

其中 $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{t}dt'V(x,t')$,$C^0(x)$ 为单位长度的位置电容,$L^0(x)=L^0_{geo}(x)+L^0_{dphing}(x)$ 为单位长度的电感，包括几何构造和动力学的贡献。利用与先前一样的推导，设 $\psi(x,t)=\sum_n \psi_n(t)u_n(x)$ 可以得到：

$$H_{tl} = \sum_n \hbar\omega_n(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \tag{114}$$

其中

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n C_r}}(a^\dagger + a),\\ \widehat{\theta}_n &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n C_r}{2}}(a^\dagger - a).\end{aligned} \tag{115}$$

且 $\hat{\theta}_n = C_r\dot{\psi}_n$ 为共轭动量，$C_r=\int_{-l}^{l}C^0(x)dx$。

这里唯一与前面的共面波导谐振器的区别是中间进行了局部收缩变窄，此时局部电感更大，从而会诱导本征波模 $u_n(x)$ 的突变，几种不同收缩方式的 $u_1(x)$ 与的 x 的关系如图30所示[22]，其中 S_{in} 为谐振器中心导体宽度，t_{in} 为其厚度，并且假设谐振器与磁通量子比特之间的连接长度 w 为 5m。因而连接在收缩位置两侧的磁通量子比特将获得强的相位偏置，因此这种收束会增强谐振器与量子比特之间的耦合。

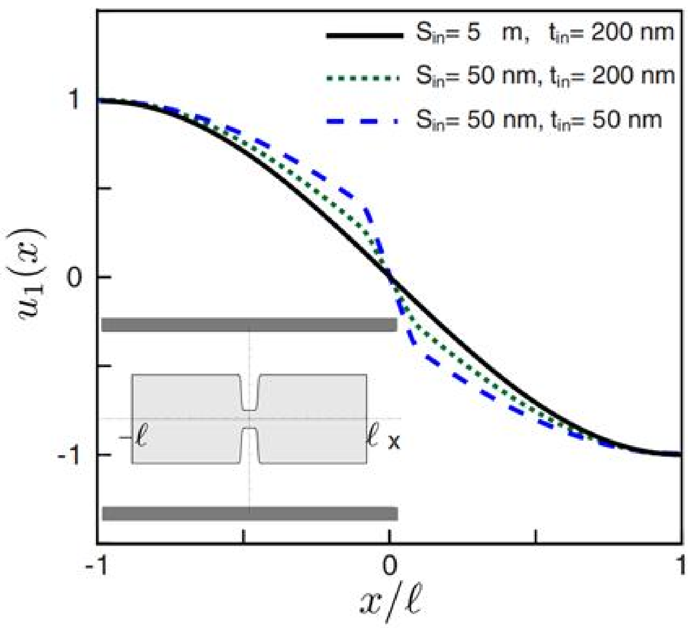

图 30: 收缩方式的 $u_1(x)$ 与的 x 的关系[22]

接下来考虑磁通量子比特与谐振器的耦合，其具体示意图如31所示。

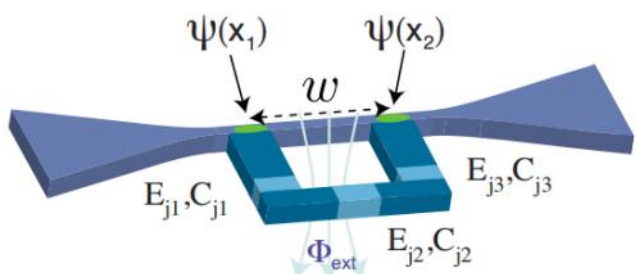

图 31: 磁通量子比特与谐振器[22]

可以写出其拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{tl}} + \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{C_{Jk}}{2} \dot{\phi}_k^2 + E_{Jk} \cos[\phi_k/\varphi_0] \right\}. \tag{116}$$

其中 C_{Jk} 为第 k 个结的结电容,E_{Jk} 为结的能量,ϕ_k 为第 k 个结的磁通量,$\phi_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi}$,对于

三结磁通量子比特，假设结 1 与结 3 是一致的，即有 $C_{J1}=C_{J3}\equiv C_J$，$E_{J1}=E_{J3}\equiv E_J$，而结 2 一般满足 $C_{J2}=\alpha C_J$，$E_{J2}=\alpha E_J$，且 $\alpha<1$，磁通量的关系应为：

$$\phi_1+\phi_2-\phi_3-\psi\left(x_2\right)+\psi\left(x_1\right)=\Phi_{ext}, \tag{117}$$

其中 Φ_{ext} 为一个外部施加的磁通量。接着我们引入一个结 1 与结 3 的磁通量的和与差进行变量替换

$$\phi_{\pm}=\{[[\phi_3+\psi(x_2)]\pm[[\phi_1+\psi(x_1)]\}/2. \tag{118}$$

并且系统中的共轭变量也变为 $q_{\pm}=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}_{\pm}$，由此利用 $T_{\pm}$ 的幺正变换[23]

$$T_{\pm}=\prod_n \exp\left[\frac{-i}{2\hbar}\psi_n q_{\pm}\delta_n^{\pm}\right]. \tag{119}$$

其中 $\delta_n^{\pm}=u_n(x_2)\pm u_n(x_1)$。可以得到哈密顿量

$$\begin{aligned} H=\sum_n&\left[\hbar\omega_n a_n^{\dagger}a_n+\frac{q_-^2}{2C_n^-}+\frac{q_+^2}{2C_n^+}-\frac{2C_{j2}}{\tilde{C}_n^2}\delta_n q_-\hat{\theta}_n\right]\\ &-E_j[2\cos\varphi_+\cos\varphi_-+\alpha\cos(\varphi_{\text{ext}}+\hat{\varphi}+2\varphi_-)]. \end{aligned} \tag{120}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_n^-}&=\frac{2C_r+2C_{j2}(\delta_n)^2}{\tilde{C}_n^2},\\ \frac{1}{C_n^+}&=\frac{C_r(C_{j1}+2C_{j2})+C_{j1}C_{j2}(\delta_n)^2}{\tilde{C}_n^2 C_{j1}},\\ \tilde{C}_n^2&=2[C_r(C_{j1}+2C_{j2})+(\delta_n^-)^2C_{j1}C_{j2}]. \end{aligned} \tag{121}$$

更进一步的，若定义 $C^{\pm}=\Sigma_n C_n^{\pm}$，并将其中的 αE_J 项展开到 $\hat{\varphi}$ 的一阶项，可将哈密顿量化为

$$H=H_r+H_{qb}+H_{\hat{q}}+H_{\hat{\varphi}}. \tag{122}$$

其中，H_r 为谐振腔哈密顿量；H_{qb} 为标准磁通量子比特的哈密顿；$H_{\hat{q}},H_{\hat{\varphi}}$ 分别描述了量子比特与谐振腔模 n 的电荷和磁通量耦合。将其以投影算符展开，有

$$\begin{aligned} H_{\hat{\varphi}}&=\sum_n\sum_{k,l}\hbar g_{\hat{\varphi},n}^{kl}|k\rangle\langle l|(a_n^{\dagger}+a_n),\\ H_{\hat{q}}&=\sum_n\sum_{k,l>k}\hbar g_{\hat{q},n}^{kl}(|k\rangle\langle l|-|l\rangle\langle k|)(a_n^{\dagger}-a_n). \end{aligned} \tag{123}$$

其中

$$\begin{aligned}
\hbar g_{\hat{\varphi},n}^{kl} &= \alpha E_J \Delta\varphi_n \langle k|\sin(\varphi_{\text{ext}} + 2\hat{\varphi}_-)|l\rangle, \\
\hbar g_{\hat{q},n}^{kl} &= \frac{2C_{j2}\delta_n}{i\widetilde{C}^2}\sqrt{\frac{\hbar C_r\omega_n}{2}}\langle k|q_-|l\rangle.
\end{aligned} \tag{124}$$

由此，整理可以得到 Rabi 模型的哈密顿量

$$\begin{aligned}
H =& \sum_n \hbar\omega_n a_n^\dagger a_n + \sum_k \hbar\Omega_k |k\rangle\langle k| + \sum_n\sum_{k,l}\hbar g_{\hat{\varphi},n}^{kl}|k\rangle\langle l|(a_n^\dagger + a_n) \\
&+ \sum_n\sum_{k,l>k}\hbar g_{\hat{q},n}^{kl}(|k\rangle\langle l| - |l\rangle\langle k|)(a_n^\dagger - a_n).
\end{aligned} \tag{125}$$

利用这种模型，即可较为容易得实现超强耦合。

9　JC 模型

首先我们尝试求解 JC 模型[24]，对于前面的模型推导，对其哈密顿量利用旋转波近似后，得到哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger\sigma_-). \tag{126}$$

可以计算得到相互作用绘景中的相互作用哈密顿量

$$H_I = \hbar g(\sigma_+ a e^{i\Delta} + a^\dagger\sigma_- e^{-i\Delta}). \tag{127}$$

其中，$\Delta = \omega_0 - \omega$ 为失谐量。

考虑耦合的一般态

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(t)|e,n\rangle + c_{g,n}(t)|g,n\rangle]. \tag{128}$$

带入薛定谔方程可以得到概率幅随时间的演化

$$\begin{bmatrix} c_{e,n}(t) \\ c_{g,n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) & i\frac{\lambda_n}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \\ i\frac{\lambda_n}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n}(0) \end{bmatrix}. \tag{129}$$

其中，$\Omega_n^2 = \Delta^2 + \lambda_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$ 为量子 Rabi 频率。假定原子初始处在上能级，即 $c_e(0) = 1$ 的情况，我们考察一个重要的物理量，即原子能级布居反转随时间演化为

$$P(t) = \langle\sigma_z\rangle = \langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}\left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2}\cos(\Omega_n t)\right]. \tag{130}$$

特别地，当发生共振时，$P(t) = \cos(\Omega_n t)$. 考虑一般情况，假设初始时刻谐振器 (光场) 的态处于

$$\phi(0) = \sum_n c_n|n\rangle. \tag{131}$$

且处在相干态 $|\alpha\rangle$ 上，有

$$c_n = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \tag{132}$$

此时布居反转随时间演化为

$$P(t)=e^{-\langle n\rangle}\sum_n\frac{\langle n\rangle^n}{n!}\cos(2\lambda\sqrt{n+1}t). \tag{133}$$

将布局数反转绘图可得图32，即此时布居反转随时间的变化，可以发现，在这种情形下，其产生了崩塌—复原现象 (collapse and revival phenomena)[25]。

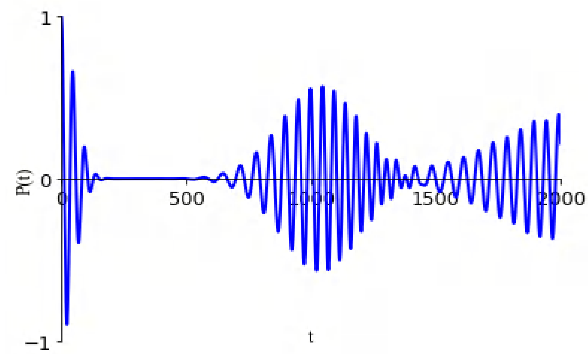

图 32: JC 模型布居反转随时间的变化

10 Rabi 模型

10.1 模型求解

在 Rabi 模型的求解中，我们取自然单位制 ($\hbar = 1$)，则它的哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + \omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\right) + \lambda(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger) \\ &= \frac{\Delta}{2}\,\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + g(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ &= \frac{\Delta}{2}\,\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + g\hat{\sigma}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\,. \end{aligned} \tag{134}$$

其中，$\hat{\sigma}$ 为与电磁场耦合的二能级原子的泡利算符，Δ 为两能级之间能级差。不同于 JC 模型，这里我们将计入反旋波项 (CRT) 的影响进行求解[26]。

首先，设 Rabi 模型的本征态为

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{135}$$

将泡利算符以矩阵形式代入，得到本征方程 $H_R\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$，展开为

$$\begin{cases} (\Delta/2\psi_1 + a^\dagger a\psi_1 + g(a^\dagger + a)\psi_2 &= E\psi_1, \\ -\Delta/2\psi_2 + a^\dagger a\psi_2 + g(a^\dagger + a)\psi_1 &= E\psi_2. \end{cases} \tag{136}$$

接着作变换 $\phi_1 = \psi_1 + \psi_2$，$\phi_2 = \psi_1 - \psi_2$，并将两式相加减，可得

$$\begin{cases} (a^\dagger a\phi_1 + g(a^\dagger + a)\phi_1 + \Delta/2\phi_2 &= E\phi_1, \\ a^\dagger a\phi_2 - g(a^\dagger + a)\phi_2 + \Delta/2\phi_1 &= E\phi_2. \end{cases} \tag{137}$$

整理为矩阵形式 $H_R'\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle$，可知它们有相同本征值，接下来求解 H_R' 即可，具体形式为

$$H_R' = \begin{pmatrix} a^\dagger a + g(a^\dagger + a) & \Delta/2 \\ \Delta/2 & a^\dagger a - g(a^\dagger + a) \end{pmatrix}. \tag{138}$$

接下来求解这个方程即可。

我们利用 Bogoliubov 变换，引入算符变换 $\hat{A} = \hat{a} + g$，其中 $\hat{A}$ 可以看作引入了一

种新的玻色子对应产生、湮灭算符。它满足对易关系

$$[A^\dagger, A] = -1. \tag{139}$$

并且它的本征态可以写为

$$|n_A\rangle = \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0_A\rangle . \tag{140}$$

满足升降阶关系

$$\begin{cases} A^\dagger |n_A\rangle = \sqrt{n+1}\, |(n+1)_A\rangle , \\ A |n_A\rangle = \sqrt{n}\, |(n-1)_A\rangle . \end{cases} \tag{141}$$

则在引入这个算符后，前面的哈密顿量可以改写为

$$H_R = \begin{pmatrix} A^\dagger A - g^2 & -\Delta/2 \\ -\Delta/2 & A^\dagger A - 2g(A^\dagger + A) + 3g^2 \end{pmatrix}. \tag{142}$$

接着我们将前面所设的态 $|\phi\rangle$ 以 $\hat{A}$ 的本征态展开

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n_A\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n |n_A\rangle . \end{aligned} \tag{143}$$

代入后可得方程组

$$\begin{cases} E \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n_A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (A^\dagger A - g^2)\alpha_n |n_A\rangle - \Delta/2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n |n_A\rangle , \\ E \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n |n_A\rangle = -\Delta/2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n_A\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} (A^\dagger A - 2g(A^\dagger + A) + 3g^2)\beta_n |n_A\rangle . \end{cases} \tag{144}$$

以一个本征态 $|m\rangle$ 左乘上式，可得两叠加系数 e_m, f_m 之间的关系

$$\begin{cases} e_m & = \Delta/2(m - g^2 - E) f_m, \\ f_m & = \frac{1}{m}[\Omega(m-1) f_{(m-1)} - f_{(m-2)}]. \end{cases} \tag{145}$$

其中

$$\Omega(m) = \frac{1}{2g}\left[(m + 3g^2 - E) - \frac{\Delta^2}{4(m - g^2 - E)}\right]. \tag{146}$$

接着再引入算符变换 $\hat{B} = \hat{a} + g$，构造出此时的哈密顿量

$$H'_R = \begin{pmatrix} B^\dagger B + 2g(B^\dagger + B) + 3g^2 & -\Delta/2 \\ -\Delta/2 & B^\dagger B - g^2 \end{pmatrix}. \tag{147}$$

同样将态 $|\phi\rangle$ 以 $\hat{B}$ 的本征态展开

$$|\phi'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle . \tag{148}$$

再重复以上的步骤，可以得到此时展开系数应满足

$$\begin{cases} e'_m &= \Delta/2(m - g^2 - E) f'_m, \\ f'_m &= \frac{1}{m}[\Omega'(m-1) f'_{(m-1)} - f'_{(m-2)}]. \end{cases} \tag{149}$$

其中

$$\Omega'(m) = \frac{1}{2g}\left[(m + 3g^2 - E) - \frac{\Delta^2}{4(m - g^2 - E)}\right]. \tag{150}$$

而当能级不简并时，用算符 $\hat{A}, \hat{B}$ 所求出对应相同能级的本征态实际上是一样的，因此它们之间应只差一个比例系数，有

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{bmatrix}. \tag{151}$$

代入具体式子后，以 $|0_a\rangle$ 左乘上式，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n g^n \sum_{n=0}^{\infty} e_n'^{g^n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n \sum_{n=0}^{\infty} f_n'^{g^n}. \tag{152}$$

计算后可以发现上式等价于以下超越方程

$$G_0^{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \left(1 \pm \frac{\Delta/2}{n - x}\right) g^n = 0. \tag{153}$$

其中，$x = E + g^2$，故函数 $G_0^{\pm}(x)$ 的零点即对应了所求本征态的本征能量。作出函数图像后，可以得到系统的能谱如33所示。

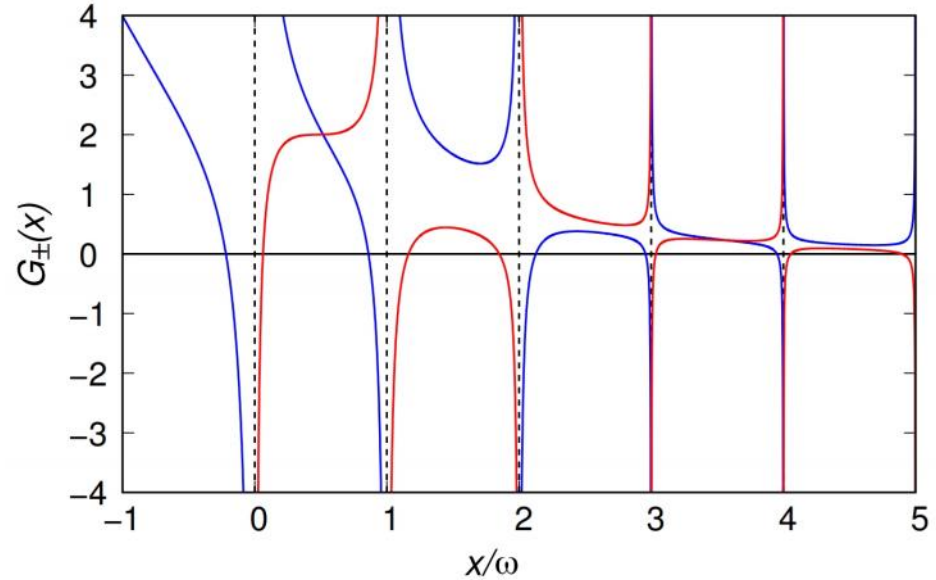

图 33: Rabi 模型 G 函数示意图[27]

图中红线代表 + 宇称时的 G 函数；蓝线代表-宇称时的 G 函数。另外若将零点数值解给出，还可以得到其能谱随着耦合强度 g 的变化情况如34所示。

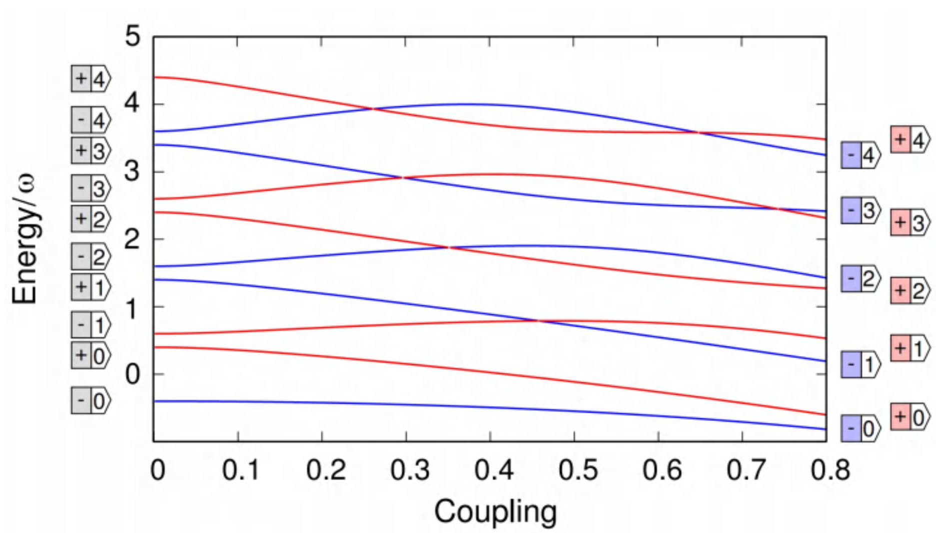

图 34: Rabi 模型能谱随 g 变化示意图[27]

其中左侧 y 轴代表的是二能级系统的上下能级与光场模式的激发数，右侧 y 轴代表的是相应能级下不同的宇称。

10.2 动力学演化特征

讨论拉比模型的动力学演化过程，我们考虑二能级原子与光场的耦合，将一般态写成线性叠加的形式，

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\uparrow}(t)|\uparrow, n\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\downarrow}(t)|\downarrow, n\rangle. \tag{154}$$

其中基矢满足

$$\begin{aligned} \sigma_z|\uparrow, n\rangle &= |\uparrow, n\rangle, \quad \sigma_z|\downarrow, n\rangle = -|\downarrow, n\rangle, \\ a^\dagger a|\uparrow, n\rangle &= n|\uparrow, n\rangle, \quad a^\dagger a|\downarrow, n\rangle = n|\downarrow, n\rangle. \end{aligned} \tag{155}$$

我们将一般态代入薛定谔方程，得到

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}C_n^{\uparrow}(t) &= (n\omega + \Delta)C_n^{\uparrow}(t) + g(\sqrt{n}C_{n-1}^{\downarrow}(t) + \sqrt{n+1}C_{n+1}^{\downarrow}(t)), \\ i\frac{d}{dt}C_n^{\downarrow}(t) &= (n\omega - \Delta)C_n^{\downarrow}(t) + g(\sqrt{n}C_{n-1}^{\uparrow}(t) + \sqrt{n+1}C_{n+1}^{\uparrow}(t)). \end{aligned} \tag{156}$$

可以很明显地看出，$|\uparrow, n\rangle$ 与 $|\downarrow, n+1\rangle$ 和 $|\downarrow, n-1\rangle$ 相耦合，而 $|\downarrow, n\rangle$ 与 $|\uparrow, n+1\rangle$ 和 $|\uparrow, n-1\rangle$ 相耦合。由于在拉比模型中宇称是守恒的，只有宇称相同的态才能相互耦合，那么这个系统可以分别在两个独立的子空间中演化，即宇称 Π 的本征值 p 分别为 ±1 的两个子空间

$$\begin{aligned} p = 1, &\quad |\downarrow, 0\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 1\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 2\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 3\rangle \leftrightarrow \cdots, \\ p = -1, &\quad |\uparrow, 0\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 1\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 2\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 3\rangle \leftrightarrow \cdots. \end{aligned} \tag{157}$$

下面我们考虑特殊情况，初始光场处在上能级相干态情况

$$|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2/2}\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\uparrow, n\rangle. \tag{158}$$

我们考察一个重要的物理量，即原子布居翻转随时间的变化

$$P(t) = \langle\sigma_z\rangle = \langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(|C_n^{\uparrow}|^2 - |C_n^{\downarrow}|^2). \tag{159}$$

当弱耦合状态 $g \ll \{\omega, \Delta\}$ 时，则可以近似看作 J-C 模型，取 $\omega = 2\Delta$，得到

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n^{\uparrow}(0)|^2 \cos(2\sqrt{n+1}gt). \tag{160}$$

对于 JC 模型，系统的布居动力学会发生崩塌和复原现象。而图35给出了不同耦合强度 g 的条件下，系统原子布居的动力学演化曲线。随着 g 的增大，系统的崩塌、复原现象会慢慢消失。不过当深强耦合 $g > \omega$ 时，再次出现系统的崩塌、复原现象。

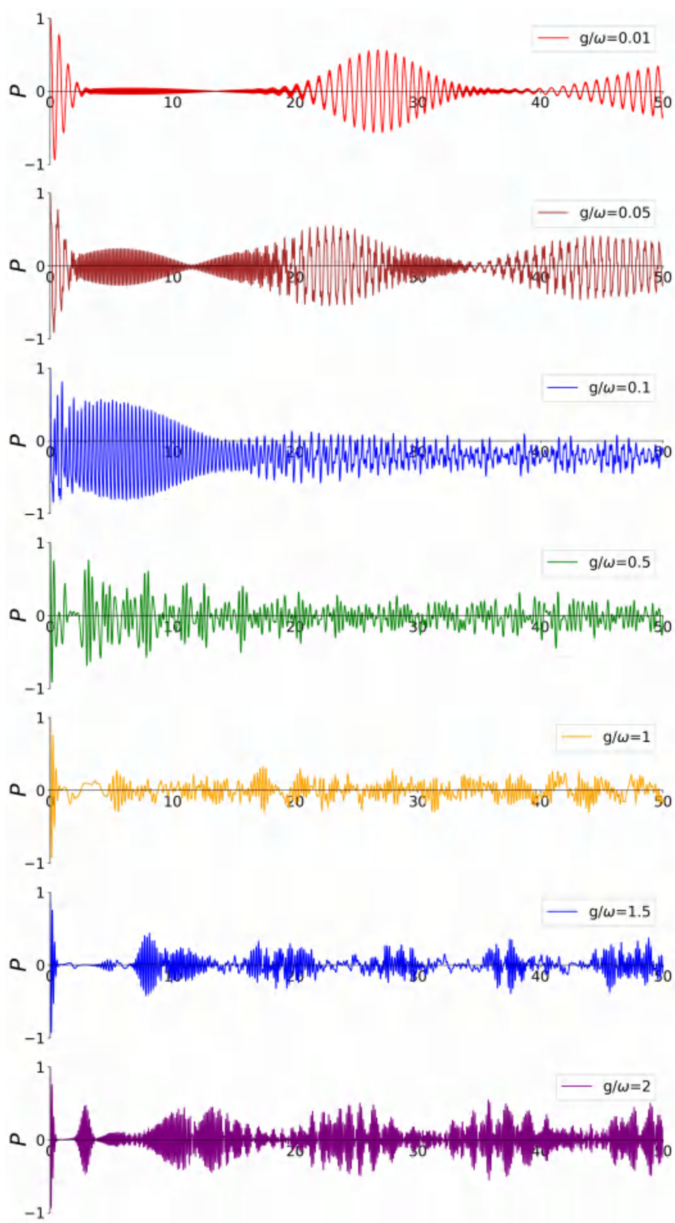

图 35: 布居数反转动力学演化过程

下面，我们通过一个直观的物理架构说明这一现象。这里重新写一下拉比模型的哈密顿量：

$$H_R = b^\dagger b + g(b^\dagger + b) - \Delta(-1)^{b^\dagger b}\Pi. \tag{161}$$

其中 Π 为宇称算符。哈密顿量对应于一个谐振子系统，其最后一项相当于系统能量移动。引入 $|p, \uparrow n_b\rangle$ 满足

$$b^\dagger b|p, \uparrow n_b\rangle = n_b|p, \uparrow n_b\rangle. \tag{162}$$

$$\Pi|p, \uparrow n_b\rangle = p|p, \uparrow n_b\rangle. \tag{163}$$

则对初始状态为：

$$|\psi(t=0)\rangle = |+, 0_b\rangle = |\uparrow, 0_a\rangle. \tag{164}$$

当 $\Delta = 0$ 时，其动力学演化由下式给出

$$|\psi(t)\rangle = e^{ig^2 t} e^{-ig^2 \sin(t)}|+, \alpha(t)\rangle. \tag{165}$$

因此，$|\psi(t)\rangle$ 复原到初始态的概率为

$$P_{+0_b} = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = e^{-|\alpha(t)|^2}. \tag{166}$$

其中，

$$\alpha(t) = \frac{g(e^{-i\omega t} - 1)}{\omega}. \tag{167}$$

由于 $\alpha(t)$ 是周期函数，所以对应的系统会周期性回复到初始态。

11 各种特殊态

11.1 Fock 态

Fock 态即为粒子数态，描述粒子在量子系统中的分布，常用 $|n\rangle$ 来表示，其中 n 为粒子的数目，其是许多量子技术的必不可少的资源，从量子通信和量子密码学到量子增强计量、新型干涉测量协议和全光量子信息处理。

利用超导量子电路中的 Fock 态，可以揭示基于光的量子属性的拓扑态[28]，在一个原子和三个腔模耦合的 JC 模型中，光子构成的福克态晶格会在三角形边缘的内切圆上发生半金属到绝缘体的拓扑相变。

11.2 Bell 态

对于贝尔态，是一种特殊的纠缠态，它是由两个量子比特构成的系统处于特定的纠缠态。

Bell 态具有一些特殊的性质，其中之一是当一个量子比特的状态被测量时，另一个量子比特的状态将会瞬间崩塌为一个确定的值。这种非局域的关联性使得 Bell 态在量子通信和量子计算领域具有重要的应用。

其有四种可能的状态，分别是

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),\\
|\psi\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),\\
|\psi\rangle_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),\\
|\psi\rangle_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).
\end{aligned}
\tag{168}
$$

偏振纠缠贝尔态是量子光学实验中应用最广泛的纠缠双光子态。这些状态下的光子对可以通过参数非线性过程产生，如自发参数下转换和自发四波混频，通过单边偏振控制进行操作，并通过基于线性光学的贝尔状态测量进行区分。因此，它们是量子信息的理想载体，广泛应用于量子通信和光子量子信息处理。需要简单可靠的量子光源来产生偏振纠缠贝尔态，特别是在光纤量子通信的电信波段。

贝尔态测量在诸如量子隐形传态、纠缠交换和量子网络等许多重要的量子领域中发挥着关键作用，而双光子 Hong-Ou-Mandel (HOM) 干涉是贝尔态测量的基础，如图36所示。

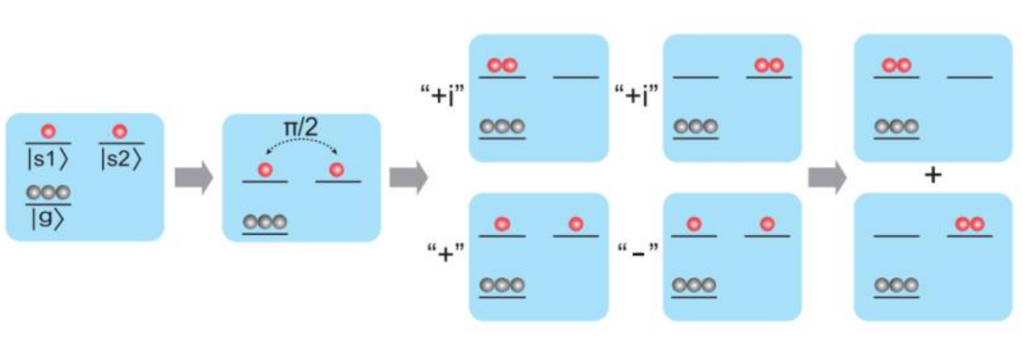

图 36: HOM 与集体激励干扰[29]

在 HOM 干涉实验中，两个处于纠缠或者相干状态的光子被分别输入到一个光学器件的两个输入端口。根据经典光学的预期，两个光子应该独立进入器件，并分别从不同的输出端口离开。然而，在量子力学的框架下，当两个光子的横向空间模式完全相同（即它们具有相同的空间波函数）时，它们会发生干涉效应。

具体而言，HOM 干涉观察到的现象是两个光子同时进入器件，并以不同的路径到达输出端口，但它们之间形成干涉。如果两个光子的横向波包以完全重叠的方式到达输出端口，则其干涉会导致两个光子都从相同的输出端口离开。这种纠缠干涉效应被称为 HOM 干涉。

HOM 是一种无经典对应的量子效应，它已被广泛用于测试光子不可分辨性[30]、产生多光子纠缠[31]、构建量子门等[32]，图37为量子门电路的一个例子。

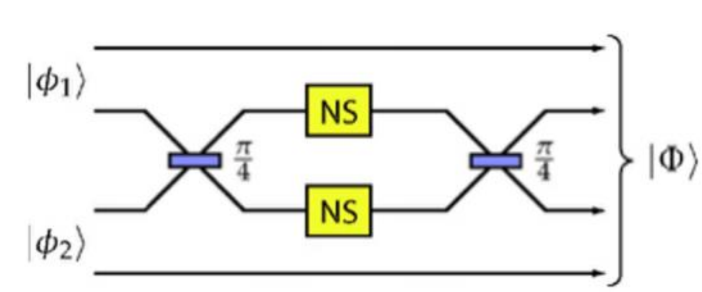

图 37: 量子 CZ 门电路[32]

利用贝尔态还可以实现量子态的远程传递。由于贝尔态是纠缠态，Bennett 等人提出了著名的 Alice-Bob 方案[33]，这个方案的目的是要求发送人员 Alice 把一个量子比特态发送给远处的接收人员 Bob。在此基础上，科学家们发展了量子通讯领域。

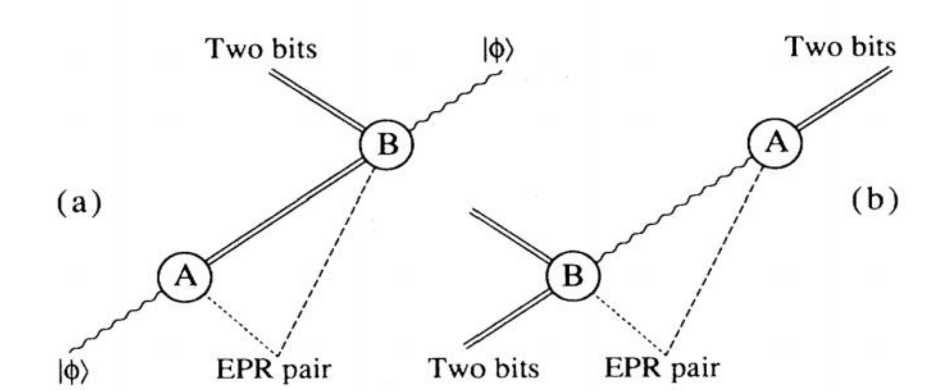

图 38: Alice-Bob 方案[33]

在超强耦合中，Bell 态能通过双量子比特与谐振器耦合实现，我们后面会进行细致的讨论。

11.3 Dicke 态

Dicke 态描述的是多粒子系统中，各个粒子的自旋（或其他内禀性质）在某个方向上的协同性。在 Dicke 态中，所有粒子具有相同的总角动量 (J)，并且其投影角动量 (M) 可以在 ($-J$) 到 (J) 之间取值。其一般形式为

$$|J, M\rangle = \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \sum_{m=-J}^{J} (\pm 1)^{J-m} \begin{pmatrix} J & J-m & M-m \\ J & m & -M \end{pmatrix} |J, m\rangle \,. \quad (169)$$

Dicke 态被证明是高度纠缠态[34]，是量子信息和计算方面的宝贵资源。众所周知，Dicke 态在多方量子网络[35]、量子密钥分配[36]、量子存储器[37]和量子计量[38-39]中发挥着重要作用。

在超强耦合和深强耦合领域，通过多量子比特与谐振器的耦合可以制备出多种 Dicke 态[40]。

11.4 暗态

暗态（dark state）是一种特殊的量子态，它在特定条件下可以对光场的吸收起到抑制作用。与一般的激发态（bright state）相比，暗态不会直接参与吸收或辐射过程。

具体来说，在一个多能级的量子系统中，如果存在一个暗能级，它与系统中其他能级之间的跃迁几乎不发生，那么该暗能级对应的量子态就是暗态。暗态不容易与外界光场发生相互作用，因此可以保持在一个稳定的量子态。最简单的暗态存在于三能级系统中，可以利用哈密顿量对角化获得。

暗态在量子信息处理、量子存储和量子干涉等领域有广泛的应用。在波导 QED 中，通过四个频率可调的 transmon 量子比特作为人工原子，可以实现暗态的调控，如图39所示。

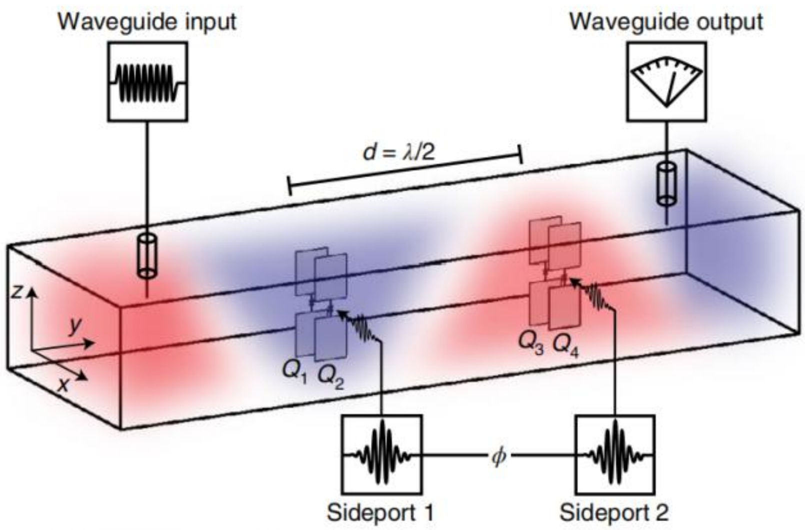

图 39: 暗态调控完整装置示意图[41]

并且在超强耦合中，其能够制备一种"类暗态"[42]，这种态的能量与耦合强度无关，能谱贯穿在整个耦合系统内，其可能与暗态一样在量子计算中有着类似的应用。

12 Bell 态的制备

12.1 单光子近似

在 Rabi 模型中，由于耦合强度很大，可以明显地加速量子比特与光子之间的相互作用，且由于不忽略反旋波项，使得 QRM 的解通常涉及有无限光子的子空间[43]，使得系统的动力学演化变得比较复杂，在量子计算中应用困难。因此我们考虑一个双量子比特与单模谐振器 (单模光场) 的相互作用，并且限制系统中最多只出现一个振动模式，即二能级谐振器 (单光子系统)，这样就可以通过绝热演化来确定性地生成两种的双比特贝尔态[44-45]

$$|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle). \tag{170}$$

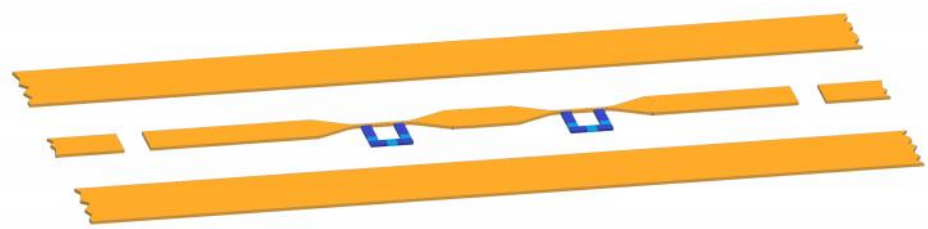

图 40: 双量子比特与单模谐振器耦合

首先可以写出各向异性两比特 QRM 的哈密顿量

$$H = \omega a^\dagger a + \sum_{i=1}^{2} \Delta_i \sigma_{iz} + \sum_{i=1}^{2} [g_{ir}(a^\dagger \sigma_i + a\sigma_i^\dagger) + g_{ic}(a^\dagger \sigma_i^\dagger + a\sigma_i)]. \tag{171}$$

其中 $a, a^\dagger$ 分别为频率 ω 光子的湮灭、产生算符，σ_1, σ_2 分别为频率 $2\Delta_1, 2\Delta_2$ 原子的泡利矩阵，g_{ic}, g_{ir} 分别为旋转波、反旋转波项的耦合强度。由哈密顿量 H 可以看出，该系统是具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的，分别存在两个不变的奇、偶宇称子空间，由此我们可以分别假设奇偶的态。($|\Psi_1\rangle$ 为偶宇称，$|\Psi_2\rangle$ 为奇宇称。)

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= c_1|0\uparrow\uparrow\rangle + c_2|0\downarrow\downarrow\rangle + c_3|1\uparrow\downarrow\rangle + c_4|1\downarrow\uparrow\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &= c_1|0\uparrow\downarrow\rangle + c_2|0\downarrow\uparrow\rangle + c_3|1\uparrow\uparrow\rangle + c_4|1\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \tag{172}$$

以下我们以偶宇称为例进行计算。利用 $a, a^\dagger, \sigma, \sigma^\dagger$ 算符的基本计算关系

$$\begin{aligned}
\sigma^\dagger \left|\uparrow\right\rangle &= 0, \\
\sigma \left|\uparrow\right\rangle &= \left|\downarrow\right\rangle, \\
a^\dagger \left|n\right\rangle &= \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle, \\
a\left|0\right\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{173}$$

由此可以给出该系统的哈密顿量

$$H = \begin{pmatrix}
\Delta_1+\Delta_2-E & 0 & g_{2r} & g_{1r} \\
0 & -\Delta_1-\Delta_2-E & g_{1c} & g_{2c} \\
g_{2r} & g_{1c} & \omega+\Delta_1-\Delta_2-E & 0 \\
g_{1r} & g_{2c} & 0 & \omega-\Delta_1+\Delta_2-E \\
0 & 0 & \sqrt{2}g_{2c} & \sqrt{2}g_{1c} \\
0 & 0 & \sqrt{2}g_{1r} & \sqrt{2}g_{2r}
\end{pmatrix}. \tag{174}$$

可以发现，上述矩阵的行数大于列数，是由于谐振器的第二激发态产生的，代表薛定谔方程是不一定有解的，但是在一些特殊的参数下，可以通过线性变换使得行数小于列数，从而求出其平凡解[46]。在 $\omega = \Delta_1 + \Delta_2 = E, g_{1r}/g_{2r} = g_{1c}/g_{2c} = \pm 1$ 的条件下，可以将矩阵化为以下形式

$$\begin{pmatrix}
g_{1r} & 0 & 0 & -\Delta_1+\Delta_2 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \pm 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{175}$$

并且可以据此求出相应本征态为

$$|\Psi\rangle = C[(\Delta_1-\Delta_2)|0\uparrow\uparrow\rangle + g_{1r}|1\rangle(|\downarrow\uparrow\rangle \mp |\uparrow\downarrow\rangle)]. \tag{176}$$

其中 C 为归一化常数。在数值模拟中，我们取

$$\begin{aligned}\Delta_1/\omega =&1-\frac{1}{2}(\frac{\omega t}{34})^{\frac{1}{3}},\\ \Delta_2/\omega =&\frac{1}{2}(\frac{\omega t}{34})^{\frac{1}{3}},\\ g_{1c}=g_{2c} =&0.539(\frac{\omega t}{34})^{\frac{1}{3}},\\ g_{1r}=g_{2r} =&0.284(\frac{\omega t}{34})^{\frac{2}{3}}.\end{aligned} \tag{177}$$

可以依此分析 $|\Psi\rangle$ 中两个态的演化，以它们出现的概率 P 为纵轴，可以得到它们各自的演化情况，如41所示。

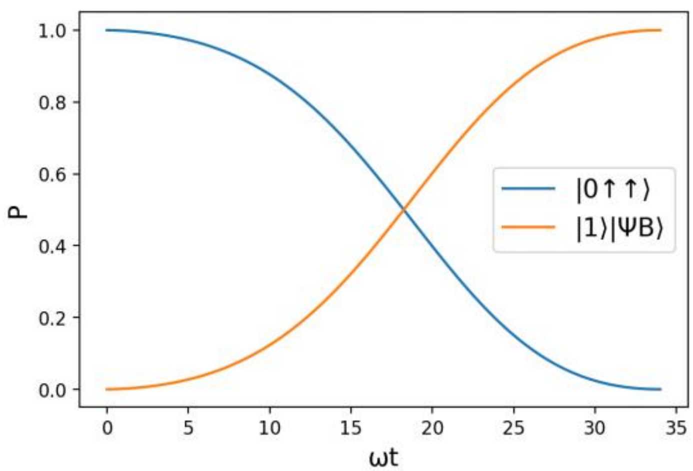

图 41: Bell 态演化模拟图

可以看出，在初态为 $|0\uparrow\uparrow\rangle$ 的情况下，若使系统沿着上面177的方式进行绝热演化，则可以使得系统最终处于一个确定的 Bell 态 $|\psi_B\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle\pm|\downarrow\uparrow\rangle)$ 上，即实现了 Bell 态的制备。

12.2 双量子比特与谐振器耦合方法

与前面类似地，先写出两比特 Rabi 模型的哈密顿量

$$H=\omega a^\dagger a+\frac{1}{2}\Delta_1\sigma_z^1+\frac{1}{2}\Delta_2\sigma_z^2+g(a^\dagger+a)(\sigma_x^1+\sigma_x^2). \tag{178}$$

其中 $a, a^\dagger$ 分别为频率 ω 光子的湮灭、产生算符，σ_1, σ_2 分别为频率 Δ_1, Δ_2 原子的泡利矩阵，g 为耦合强度。

首先将绘景变换至相互作用绘景下，变换算符为

$$U=e^{-i(\omega a^\dagger a+\frac{1}{2}\Delta_1\sigma_z^1+\frac{1}{2}\Delta_2\sigma_z^2)t}. \tag{179}$$

则相互作用绘景下的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H_I=&U^\dagger H_s U\\=&gU^\dagger\left(a^\dagger+a\right)\left(\sigma_x^1+\sigma_x^2\right)U\\=&g(U_1^\dagger a^\dagger U_1+U_1^\dagger aU_1)(U_2^\dagger\sigma_x^1U_2+U_3^\dagger\sigma_x^2U_3).\end{aligned} \tag{180}$$

其中

$$\begin{cases}U_1=e^{-i\omega a^\dagger at},\\U_2=e^{-\frac{1}{2}\Delta_1\sigma_z^1},\\U_3=e^{-\frac{i}{2}\Delta_2\sigma_z^2}.\end{cases} \tag{181}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式

$$e^{\xi A}Be^{-\xi A}=B+\xi[A,B]+\frac{\xi^2}{2!}[A,[A,B]]+\cdots. \tag{182}$$

即可得到

$$\begin{aligned}H_I=&g(a^\dagger e^{i\omega t}+ae^{-i\omega t})(\sigma_x^1\cos\Delta_1t-\sigma_y^1\sin\Delta_1t+\sigma_x^2\cos\Delta_1t+\sigma_y^2\sin\Delta_2t)\\=&g(a^\dagger e^{i\omega t}+ae^{-i\omega t})(\sigma_+^1e^{i\Delta_1t}+\sigma_-^1e^{-i\Delta_1t}+\sigma_+^2e^{i\Delta_2t}+\sigma_-^2e^{-i\Delta_2t}).\end{aligned} \tag{183}$$

展开可得

$$\begin{aligned}H_I=&g\left(a^\dagger\sigma_+^1e^{i(\omega+\Delta_1)t}+a^\dagger\sigma_+^2e^{i(\omega+\Delta_2)t}+a\sigma_-^1e^{-i(\omega+\Delta_1)t}+a\sigma_-^2e^{-i(\omega+\Delta_2)t}\right)\\&+g\left(a^\dagger\sigma_-^1e^{i(\omega-\Delta_1)t}+a^\dagger\sigma_-^2e^{i(\omega-\Delta_2)t}+a\sigma_+^1e^{-i(\omega-\Delta_1)t}+a\sigma_+^2e^{-i(\omega-\Delta_2)t}\right).\end{aligned} \tag{184}$$

此时通过控制外参量，使得两个原子能级 Δ_1,Δ_2 互为相反数，此时即对模型增加一个约束，并记 Δ 满足以下关系

$$\begin{cases}\Delta&=-\omega+\Delta_1,\\\Delta&=-\omega-\Delta_2.\end{cases} \tag{185}$$

倘若能够通过外加手段使得 $\omega+\Delta_1,\omega-\Delta_2$ 的指数项能够消除，即，则可以将哈密顿

量化简为以下形式

$$H=g\left(a\sigma_{+}^{1}e^{i\Delta t}+a^{\dagger}\sigma_{-}^{1}e^{-i\Delta t}+a^{\dagger}\sigma_{+}^{2}e^{-i\Delta t}+a\sigma_{-}^{2}e^{i\Delta t}\right). \tag{186}$$

要将哈密顿量中光场部分与原子能级的部分分开，接着进行中岛变换，设变换算符为

$$U=e^{-i\int_0^t Hd\tau}. \tag{187}$$

则变换后算符变为

$$\begin{aligned}\tilde{H}=&U^{\dagger}HU-iU\dagger\frac{\partial U}{\partial t}\approx\frac{1}{2}\Big[i\int_0^t Hd\tau,H\Big]\\=&-\frac{2g^2}{\Delta}\sin^2\frac{\Delta t}{2}[(\sigma_{+}^{1}\sigma_{+}^{2}+\sigma_{-}^{1}\sigma_{-}^{2})+(\sigma_{+}^{1}\sigma_{-}^{1}+\sigma_{+}^{2}\sigma_{-}^{2})+a^{\dagger}a(\sigma_{z}^{1}+\sigma_{z}^{2})]\\=&-\frac{2g^2}{\Delta}\sin^2\frac{\Delta t}{2}(\sigma_{+}^{1}\sigma_{+}^{2}+\sigma_{-}^{1}\sigma_{-}^{2})+shift.\end{aligned} \tag{188}$$

此时即可发现，变换后的哈密顿量以双量子比特 Bell 态 $|\Psi_B\rangle$ 作为本征态，即

$$|\Psi_B\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle\pm|\downarrow\downarrow\rangle). \tag{189}$$

从而我们可以类似地按照前面所讲述的方法，采用绝热近似，使得一个态往 Bell 态的方向演化。

13 总结

本文在讨论了光场量子化和 LC 谐振子的基础上，探讨了约瑟夫森效应，理论推导了约瑟夫森结的等效电路。由于约瑟夫森结的电学性质随温度降低呈现出明显的量子行为，通过控制约瑟夫森结的大小和电流，可以实现对量子比特的操控。因此我们利用约瑟夫森结与 SQUID 构建了多种量子比特，包括电荷量子比特、磁通量子比特与相位量子比特。由于一般的量子比特对环境的要求较高，且退相干时间较短，因此我们在电荷量子比特的基础上构建了 transmon 量子比特。

接着，我们探究了量子比特与谐振器的相互作用、光和二能级人工原子相互作用，求解了弱耦合的 JC 模型与超强耦合的 Rabi 模型。通过利用量子比特与谐振器的耦合相互作用，探索了超导量子电路中的超强耦合产生机制。这一部分，我们主要求解了量子 Rabi 模型并讨论了其动力学演化，还进行了仿真求解，同时也对 JC 模型进行了求解。通过二者进行比较，计算了布居数反转的演化过程，发现弱耦合和深强耦合均出现了崩塌复原现象，而超强耦合并未出现类似的现象。

最后，我们对量子力学中的各种态进行了简介，并且对制备贝尔态提出了一种方法。对于双量子比特与谐振腔的耦合情况，我们考虑单光子的子空间，在进行一定的近似并设定相应参数的演化规律后，发现利用绝热演化可以使得系统演化到确定的双量子比特 Bell 态。同时我们提出了此模型制备 Bell 态的另一种可能，从 Rabi 模型的哈密顿量出发，写出其相互作用绘景下的哈密顿量并利用中岛变换，其会出现一些谐波项，倘若可以找到手段将其消除，则哈密顿量的本征态将是 Bell 态，通过某些演化方法可能能够实现 Bell 态的制备。

总的来说，我们研究了利用超导量子电路构建人工原子——量子比特，并求解了其与谐振器的相互作用，求解了 JC 模型和 Rabi 模型，探究了布居数反转的时间演化随耦合强度的变化，并最后提出了一种 Bell 态制备的方法，以及一种可能的制备的方法，未来将会继续进行探究。

参考文献

[1] FRISK KOCKUM A, MIRANOWICZ A, DE LIBERATO S, et al. Ultrastrong coupling between light and matter[J]. Nature Reviews Physics, 2019, 1(1): 19-40.

[2] YOU J Q, NORI F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits [J]. Nature, 2011, 474(7353): 589-597.

[3] XIANG Z L, ASHHAB S, YOU J Q, et al. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems[J]. Rev. Mod. Phys., 2013, 85: 623-653.

[4] CIUTI C, BASTARD G, CARUSOTTO I. Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field[J]. Phys. Rev. B, 2005, 72: 115303.

[5] ANAPPARA A A, DE LIBERATO S, TREDICUCCI A, et al. Signatures of the ultrastrong light-matter coupling regime[J]. Phys. Rev. B, 2009, 79: 201303.

[6] NIEMCZYK T, DEPPE F, HUEBL H, et al. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime[J]. Nature Physics, 2010, 6(10): 772-776.

[7] FORN-DÍAZ P, LISENFELD J, MARCOS D, et al. Observation of the Bloch-Siegert Shift in a Qubit-Oscillator System in the Ultrastrong Coupling Regime[J]. Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 237001.

[8] FORN-DÍAZ P, ROMERO G, HARMANS C J P M, et al. Broken selection rule in the quantum Rabi model[J]. Scientific Reports, 2016, 6(1).

[9] BOSMAN S J, GELY M F, SINGH V, et al. Approaching ultrastrong coupling in transmon circuit QED using a high-impedance resonator[J]. Phys. Rev. B, 2017, 95: 224515.

[10] FORN-DÍAZ P, GARCÍA-RIPOLL J J, PEROPADRE B, et al. Ultrastrong coupling of a single artificial atom to an electromagnetic continuum in the nonperturbative regime [J]. Nature Physics, 2017, 13(1): 39-43.

[11] DIRAC P A M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927, 114(767): 243-265.

[12] BLAIS A, GRIMSMO A L, GIRVIN S M, et al. Circuit quantum electrodynamics[J]. Rev. Mod. Phys., 2021, 93: 025005.

[13] POZAR D. Microwave Engineering, 4th Edition[M]. Wiley, 2011.

[14] 黄昆. 固体物理学[M]. 北京, 中国: 高等教育出版社, 2012.

[15] 曾谨言. 量子力学. 卷 I[M]. 北京：科学出版社, 2013.

[16] WENDIN G, SHUMEIKO V S. Superconducting Quantum Circuits, Qubits and Computing[Z]. 2005.

[17] RODRIGUES D A. Superconducting charge qubits[J]. 2003.

[18] JOHANSSON R. Quantum Mechanics in Superconducting Circuits and Nanomechanical Devices[D]. Technical report MC2 - Department of Microtechnology and Nanoscience, Chalmers University of Technology: 152. Göteborg, Sweden: Chalmers, Microtechnology, 2009.

[19] MAKHLIN Y, SCHÖN G, SHNIRMAN A. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices[J]. Rev. Mod. Phys., 2001, 73: 357-400.

[20] KRANTZ P, KJAERGAARD M, YAN F, et al. A quantum engineer's guide to superconducting qubits[J]. Applied Physics Reviews, 2019, 6(2).

[21] VIEHMANN O. Multi-qubit circuit quantum electrodynamics[J]. 2013.

[22] BOURASSA J, GAMBETTA J M, ABDUMALIKOV A A, et al. Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase-biased flux qubits[J]. Phys. Rev. A, 2009, 80: 032109.

[23] REYNAUD S, GIACOBINO E, ZINNJUSTIN J. Fluctuations quantiques : Les Houches, Session LXIII, 27 juin-28 juillet 1995 = Quantum fluctuations[J]. 1997.

[24] 张智明. 量子光学[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[25] SCULLY M O, ZUBAIRY M S, MILONNI P W. Quantum Optics[J]. Physics Today, 1998, 51(10): 90-92.

[26] XIE Q, ZHONG H, BATCHELOR M T, et al. The quantum Rabi model: solution and dynamics[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2017, 50(11): 113001.

[27] BRAAK D. On the Integrability of the Rabi Model[J]. Physics, 2011.

[28] DENG J, DONG H, ZHANG C, et al. Observing the quantum topology of light[J]. Science, 2022, 378(6623): 966-971.

[29] LI J, ZHOU M T, JING B, et al. Hong-Ou-Mandel Interference between Two Deterministic Collective Excitations in an Atomic Ensemble[J]. Phys. Rev. Lett., 2016, 117: 180501.

[30] SANTORI C, FATTAL D, VUČKOVIĆ J, et al. Indistinguishable photons from a single-photon device[J]. Nature, 2002, 419(6907): 594-597.

[31] PAN J W, CHEN Z B, LU C Y, et al. Multiphoton entanglement and interferometry[J]. Rev. Mod. Phys., 2012, 84: 777-838.

[32] KOK P, MUNRO W J, NEMOTO K, et al. Linear optical quantum computing with photonic qubits[J]. Rev. Mod. Phys., 2007, 79: 135-174.

[33] BENNETT C H, BRASSARD G, CRÉPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 1895-1899.

[34] STOCKTON J K, GEREMIA J M, DOHERTY A C, et al. Characterizing the entanglement of symmetric many-particle spin-$\frac{1}{2}$ systems[J]. Phys. Rev. A, 2003, 67: 022112.

[35] PREVEDEL R, CRONENBERG G, TAME M S, et al. Experimental Realization of Dicke States of up to Six Qubits for Multiparty Quantum Networking[J]. Phys. Rev. Lett., 2009, 103: 020503.

[36] ZHU C, XU F, PEI C. W-state Analyzer and Multi-party Measurement-device-independent Quantum Key Distribution[J]. Scientific Reports, 2015, 5(1): 17449.

[37] LVOVSKY A, SANDERS B, TITTEL W. Optical quantum memory[J]. Nature Photon, 2009, 3(12): 706-714.

[38] LÜCKE B, SCHERER M, KRUSE J, et al. Twin matter waves for interferometry beyond the classical limit[J]. Science, 2011, 334(6053): 773-776.

[39] TÓTH G. Multipartite entanglement and high-precision metrology[J]. Phys. Rev. A, 2012, 85: 022322.

[40] WU C, GUO C, WANG Y, et al. Generation of Dicke states in the ultrastrong-coupling regime of circuit QED systems[J]. Phys. Rev. A, 2017, 95: 013845.

[41] ZANNER M, ORELL T, SCHNEIDER C M F, et al. Coherent control of a multi-qubit dark state in waveguide quantum electrodynamics[J]. Nature Physics, 2022, 18(5): 538-543.

[42] PENG J, ZHENG C, GUO G, et al. Dark-like states for the multi-qubit and multi-photon Rabi models[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2017, 50(17): 174003.

[43] ZHANG Y Y, CHEN Q H, ZHAO Y. Generalized rotating-wave approximation to biased qubit-oscillator systems[J]. Physical Review A, 2013, 87(3): 7841-7850.

[44] COMPARAT D. General conditions for quantum adiabatic evolution[J]. Physical Review A, 2009.

[45] LIU J, WU B, NIU Q. Nonlinear evolution of quantum states in the adiabatic regime - art. no. 170404[J]. Physical review letters, 2003(17): 90.

[46] PENG J, ZHENG J, YU J, et al. One-Photon Solutions to the Multiqubit Multimode Quantum Rabi Model for Fast State Generation[J]. Physical Review Letters, 2021, 127(4).

附录

A Python 求解代码

```
#JC模型布居数反转求解代码
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from qutip import *
N = 50 # number of cavity fock states
wc = 1.0 * 2 * np.pi # cavity frequency
w0 = 1.0 * 2 * np.pi # atom frequency
g = 0.01 * 2 * np.pi # coupling strength
kappa = 0.01 # cavity dissipation rate
gamma = 0.01 # atom dissipation rate
use_rwa = 1
# Jaynes-Cummings Hamiltonian |↑,n>
a = tensor(qeye(2), destroy(N)) #湮灭算符
sm = tensor(sigmam(), qeye(N)) #sigma-
sp = tensor(sigmap(), qeye(N)) #sigma+
sz = tensor(sigmaz(), qeye(N)) #sigma_z
#H = wc * a * a.dag() + w0 * tensor((sigmax() + 1), qeye(N))
#H = wc*a.dag()*a + w0*sm.dag()*sm/2
H = wc*a.dag()*a + w0*sz/2
if use_rwa:
    H += g * (a.dag() * sm + a * sp) #JC模型
else:
    H += g * (a.dag() + a) * (sp + sm) #Rabi模型
# collapse operators
n_th = 0.25
c_ops = [
np.sqrt(kappa * (1 + n_th)) * a,
np.sqrt(kappa * n_th) * a.dag(),
np.sqrt(gamma) * sm,
]
#times = np.linspace(0, 800, 2000)
times = np.linspace(0, 50, 2000)/g
psi0 = tensor(fock(2,0), coherent(N, 10))
result = mesolve(H, psi0, times) #未考虑耗散
# 绘制布居数反转随时间演化的曲线
```

```python
plt.yticks([-1,0,1])
ax=plt.gca()
ax.spines["top"].set_color("none")
ax.spines["right"].set_color("none")
ax.spines["left"].set_position(("data",0))
ax.spines["bottom"].set_position(("data",0))
ax.xaxis.set_ticks_position("bottom")
ax.yaxis.set_ticks_position("left")
for label in ax.get_xticklabels()+ax.get_yticklabels():
    label.set_fontsize(13)
plt.ylim(-1,1)
plt.plot(np.linspace(0, 50, 2000), expect(sz, result.states))
plt.xlabel(r"$\tau$", fontdict={'family' : 'Times New Roman', 'size':13},labelpad
    =80)
plt.ylabel(r"$P(\tau)$", fontdict={'family' : 'Times New Roman', 'size':13},labelpad
    =-8)
plt.show()
```

```python
#Rabi模型布居数反转求解代码
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from qutip import *
N = 50 # number of cavity fock states
wc = 1.0 * 2 * np.pi # cavity frequency
w0 = 1.0 * 2 * np.pi # atom frequency
#|↑,n>
a = tensor(qeye(2), destroy(N)) #湮灭算符
sm = tensor(sigmam(), qeye(N)) #sigma-
sp = tensor(sigmap(), qeye(N)) #sigma+
sz = tensor(sigmaz(), qeye(N)) #sigma_z
H = wc*a.dag()*a + w0*sz/2
psi0 = tensor(fock(2,0), coherent(N, 10))
plt.figure(figsize=(15,20),dpi=300)
g_list = [0.01,0.1,0.5,1,2]
for i in range(len(g_list)):
    g = g_list[i] * 2 * np.pi # coupling strength
    times = np.linspace(0, 50, 20000)/g
    H += g * (a.dag() + a) * (sp + sm) #Rabi模型
    result = mesolve(H, psi0, times)
    plt.subplot(len(g_list),1,i+1)
```

```
    plt.yticks([-1,0,1])
    ax=plt.gca()
    ax.spines["top"].set_color("none")
    ax.spines["right"].set_color("none")
    ax.spines["left"].set_position(("data",0))
    ax.spines["bottom"].set_position(("data",0))
    ax.xaxis.set_ticks_position("bottom")
    ax.yaxis.set_ticks_position("left")
    for label in ax.get_xticklabels()+ax.get_yticklabels():
        label.set_fontsize(20)
    plt.xlim(0,50)
    plt.ylim(-1,1)
    plt.plot(np.linspace(0, 50, 20000), expect(sz, result.states), label="g/$\omega$={}".format(g_list[i]))
    plt.legend(loc='upper right', fontsize=20)
    #plt.xlabel(r"$t$", fontdict={'family' : 'Times New Roman', 'size':8},labelpad=80)
    plt.ylabel(r"$P$", fontdict={'family' : 'Times New Roman', 'size':30},labelpad=-10)
```