

实验 DX1、DX2 蔡氏混沌电路实验

实验人：路尚润 21305127 合作人：巩元昊 21305179 指导老师：陈文杰¹

(1 中山大学物理系, 广东广州 510275)

摘要：一个确定的动力系统有三种常见的稳定状态，平衡态、周期振荡态和准周期振荡态。混沌振荡是一种不稳定的但有限的动力学振荡行为，在研究混沌现象中，蔡氏混沌电路是一种应用广泛的实验教学电路，其能够产生较多的混沌现象相图，可以对混沌现象有着较好的观测。在本文中，我们首先进行了一种基础蔡氏混沌电路的实验以及仿真，给出了较多的相图，其中包括直线、极限环、双吸引子、左右单吸引子，并测量了部分阻值区间，同时给出了部分周期相图，仿真实验相图基本一致；然后我们进行了一种拓展蔡氏混沌电路的实验与仿真，同样给出了较为丰富的相图，也同样包含基础实验种所给出的几种相图，相图均十分清晰、明显；最后，我们先利用编程的方法实现了 Lorenz 混沌系统的求解，观察了混沌系统状态与其初值、参数的关系，然后求解了两种蔡氏混沌电路，得到了直线、极限环、双吸引子和单吸引子相图，图像清晰明了。实验较为成功

关键词：Multisim 仿真；蔡氏混沌电路；混沌系统；Lorenz 混沌系统；MMA 数值求解

1 引言

20 世纪 60 年代 Lorenz 在实验中发现第一个混沌吸引子的 Lorenz 系统^[1]，1984 年华裔学者蔡少棠提出了著名的“蔡氏电路^[2]”，通过计算机和电子电路实验研究，证实了“蔡氏电路”是一种自激振荡电路，在一定参数条件下，能产生各种分岔，单旋涡和双旋涡吸引因子等丰富和复杂的非线性现象和混沌动力学行为。之后相继发现了许多新型混沌系统，如分数阶系统^[3]，多翼混沌系统^[4]，超混沌系统及恒 Lyapunov 指数系统^[5]等。

本文中，我们首先进行了一种基础蔡氏混沌电路的实现，通过进行实际实验以及仿真模拟，实现了直线、极限环、双吸引子、左右单吸引子等基础相图，以两个方向调节测量了其产生相图的阻值区间，并且给出了较多的周期相图；然后我们进行拓展实验部分，根据文献^[2]搭建并仿真了一种新的蔡氏混沌电路，同样给出了较多的相图以及阻值区间，调节出了部分周期相图，相图均清晰明了；最后我们利用 Mathematica 求解了经典 Lorenz 系统，观测了系统状态与初值、参数的关系，并且对两种蔡氏混沌电路进行求解，得出了直线、极限环、双吸引子、单吸引子各个图像，图像十分清晰直观。

2 蔡氏混沌电路实验

2.1 NI Virtual Bench 设备

NI VirtualBench 是用 LabVIEW 编程控制的多功能仪器，集成了混合信号示波器、函数发生器 (FGEN)、数字万用表、数字 I/O 口和直流电源等五种仪器的功能。为了方便使用，设备厂家已编制了 VirtualBench 虚拟仪器测控软件，可以直接使用。若需要用 LabVIEW 对该平台进行编程控制，进行二次开发，则需要 LabVIEW 2015 及以上的版本，测控计算机还需要同时安装 VirtualBench18.0 驱动程序。



图 1: NI VirtualBench 平台外形图

2.2 仿真软件

Multisim 仿真软件是电子线路仿真软件, 基于工业标准 SPICE 仿真, 以获得最优化的设计。该软件的前身为加拿大 IIT(Interactive Image Technologies) 公司于 1988 年推出的 EWB(ElectronicsWork Bench) 套件, 是一套用于电子线路设计和仿真的 EDA 软件。该套件可对模拟、数字、模拟/数字混合电路进行仿真, 具有很强的分析功能。

2001 年, IIT 公司在推出 EWB6.0 时, 将套件名称改为 Multisim, 意为多功能仿真软件, 即 Multisim2001。2005 年, 美国 NI(National Instrument) 公司收购了 IIT 公司, 将软件改名为 NI Multisim, 本实验将采用 NI Multisim12.0 版软件。

2.3 混沌电路

一个确定的动力系统有三种常见的稳定状态, 平衡态、周期振荡态和准周期振荡态。混沌振荡是一种不稳定的但有限的动力学振荡行为, 局限在有限区域, 轨道永不重复且具有遍历性。

混沌振荡有如下几个特征: 混沌运行对系统初始值极端敏感性, 初始值极其微小的改变, 会使系统的振荡输出产生很大差异; 混沌振荡输出的信号是一定频率范围内的连续谱; 吸引子局限在有限的区域内, 对大范围而言, 可看作稳定的吸引子; 吸引子空间结构复杂, 具有无穷层次自相似结构。

2.4 蔡氏电路

在混沌现象研究中, 蔡氏电路是被广泛用作混沌实验教学的经典电路。原理图如图2所示, 由一个线性电感 L , 两个线性电容 C_1 、 C_2 , 一个线性电阻 R_1 和一个非线性电阻 R_N 构成。蔡氏电路是一个结构简单的三阶自治动态系统, 能产生丰富的混沌现象。其中电感 L 和电容 C_2 构成一个 LC 振荡电路, 非线性电阻 R_N 是有源非线性的分段线性电阻, 与电容 C_1 并联滤波电路将振荡器产生的正弦信号移相输出, 线性电阻 R_1 调节 C_1 和 C_2 相位差, 并消耗能量。非线性电阻 R_N 伏安特性如图3所示。

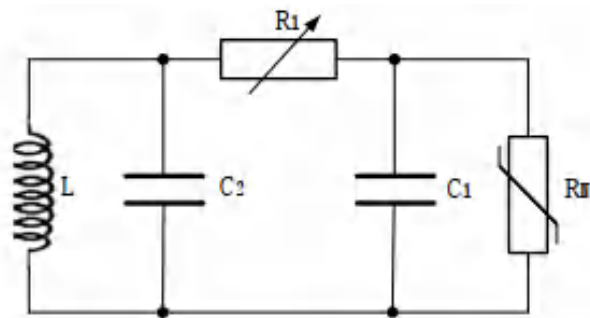


图 2: 蔡氏电路原理图

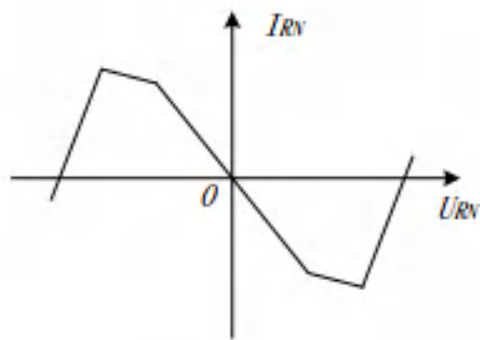


图 3: 非线性电阻伏安特性

根据基尔霍夫定律^[6], 由图2可知

$$i_{C_1} = C_1 \cdot \frac{dU_{C_1}}{dt}; i_{C_2} = C_2 \cdot \frac{dU_{C_2}}{dt}; u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad (1)$$

得到电路的非线性动力学方程如公式2所示:

$$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{dU_{C_1}}{dt} = \frac{u_{C_2} - u_{C_1}}{R_1} - f(u_{R_N}) \\ C_2 \cdot \frac{dU_{C_2}}{dt} = i_L - \frac{u_{C_2} - u_{C_1}}{R_1} \\ L \cdot \frac{di_L}{dt} = -U_{C_2} \end{cases} \quad (2)$$

其中, U_{C_1} 是电容 C_1 上的电压, U_{C_2} 是电容 C_2 上的电压, i_L 是电感上电流, 由于 R_N 是非线性电阻, $f(u_{R_N})$ 是非线性函数, 上述方程组没有解析解, 且方程组右端不显含时间变量的微分方程组, 构成三阶自治动态系统。

3 拓展实验

在蔡氏混沌电路实验的基础上, 采用 Multisim (或 Proteus、LTspiceIV) 电路仿真平台, 对自己检索的混沌电路进行仿真, 并采用 LabVIEW (或 MATLAB、Mathematica、Python 等) 软件根据动力学方程编程生成吸引子图像, 将计算结果、仿真结果和实验结果进行对比。

混沌现象经典的洛伦兹 (E. Lorens) 方程是由美国气象学家洛伦兹在处理贝纳德 (Benard) 对流实验的基础上提出的。他利用流体力学中的 Navier-Stokes 方程、热传导方程和连续性方程处理贝纳德对流, 推导出描述两无限大平面间大气对流的非线性微分方程组, 用于预测大气变化。若假设无限大平板水平放置, (x, y) 为水平方向, z 为垂直于无限大平板的竖直方向, 则洛伦兹方程可写为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -P(x - y) \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (3)$$

其中, x 表示对流的翻动速率, y 表示对流时上升与下降的液体之间的温差, z 表示垂直方向的温度梯度, xy 和 xz 为两个非线性项。(P, γ, b) 都是无量纲的参数, 其中 P 是普朗特 (Prandtl 1 数), 与液体的扩散系数 D_T 成正比。 b 称为速度阻尼常数, 与对流的几何结构大小相关。 $\gamma = R/R_C$ 称为相对瑞利数, 描述流体运动特性。瑞利数

$$R = g \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot d^3 / (\eta \cdot D_T) \quad (4)$$

其中 g 为重力加速度, α 为热膨胀系数, ΔT 为两平板温差, d 为板间距离, η 为粘滞系数, D_T 为扩散系数。温差大、平板间距离大, 则 R 越大; 粘滞系数大、扩散快, 则 R 越小。流体系统存在一个临界瑞利数 R_C , R 大于 R_C 时, 流体出现对流; R 继续增大, 出现湍流等混沌现象。

在混沌现象研究中, 蔡氏电路是被广泛应用的一种混沌实验经典电路, 蔡氏电路的动力学方程可写成

$$\begin{cases} \frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot (u_{C2} - u_{C1}) - \frac{1}{C_1} \cdot f(u_{R_N}) \\ \frac{dU_{C2}}{dt} = \frac{i_L}{C_2} + \frac{1}{R_1 \cdot C_2} \cdot (u_{C1} - u_{C2}) \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{-1}{L} \cdot U_{C2} \end{cases} \quad (5)$$

$$f(u_{R_N}) = G_b \cdot U_{C1} + \frac{1}{2} \cdot (G_a - G_b) \cdot (|U_{C1} + E| - |U_{C1} - E|) \quad (6)$$

其中, G_a 是内区间电导, G_b 是外区间电导, E 是内外

区间转折点电压。

$$f(u_{R_N}) = \begin{cases} G_b \cdot U_{C1} + E \cdot (G_a - G_b), & U_{C1} \geq E \\ G_a \cdot U_{C1}, & -E \leq U_{C1} \leq E \\ G_b \cdot U_{C1} - E \cdot (G_a - G_b), & U_{C1} \leq -E \end{cases} \quad (7)$$

归一化后的蔡氏混沌电路方程为,

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha \cdot (y - x) - f(x) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \\ f(x) = m_b \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (m_a - m_b) \cdot (|x + 1| - |x - 1|) \end{cases} \quad (8)$$

4 实验装置

4.1 蔡氏混沌电路实验

NI VirtualBench-8012 一体化仪器, 实验测控用计算机 (安装了 Multisim、LabVIEW、ELVIS Launcher 和 NI VirtualBench 软件。电子元器件若干和面包板两块, 螺丝批和绝缘镊子各 1 把, 导线若干。

4.2 拓展实验

ELVIS II+ 平台及原型板一套, NI VirtualBench-8012 一体化仪器, 实验测控用计算机 (安装了 Multisim、LabVIEW、ELVIS Launcher 和 NI VirtualBench 软件), 电子元器件若干和面包板两块, 螺丝批和绝缘镊子各 1 把, 导线若干。

4.3 元器件参数

实验中所用元器件参数如表1 我们也利用了运算

表 1: 实验用元件参数

元件类别	需求元件参数值	实际元件参数值	
电阻	3300	3275	
	22000Ω	21932Ω	21897 Ω
	220Ω	221.3Ω	221.9Ω
	1000Ω	1004.8 Ω	1002.9Ω
	2200Ω	2192.7Ω	
	100Ω	101.3Ω	
	1800Ω	1785.7Ω	
电容	100nF	95.8nF	98.9nF
	10nF	10.08nF	

放大器芯片，其型号为 LM358P。

5 实验内容

5.1 蔡氏混沌电路实验

(1) 利用 Multisim 电路仿真软件搭建蔡氏混沌电路。

仿真电路、参数及数据如图4所示

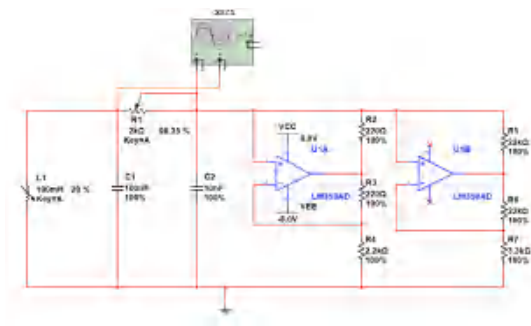


图 4: 蔡氏电路图

(2) 通过调节 $L1$ 与 $R1$ 的参数，用示波器的 XY 功能观察并记录各自不同的混沌现象。

(3) 实验搭建蔡氏混沌电路，电路如图4所示。

(4) 利用 VirtualBench 观测混沌现象。

5.2 拓展实验

(1) 编程仿真图4中的蔡氏电路实验，不利用仿真软件，利用数值求解软件进行编写，得到双吸引子图像。

(2) 对自选混沌电路进行仿真。仿真电路、参数及数据如图5所示

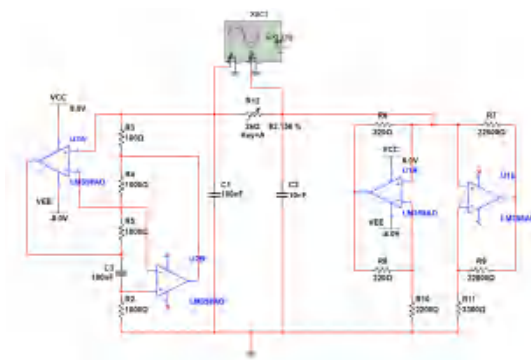


图 5: 拓展蔡氏混沌电路

(3) 对自选混沌电路进行编程计算，得到双吸引子的图像。

(4) 利用实验室提供的元器件和面包板，自行搭建自选混沌电路。尽可能给出更多的相图，如直线、开口左向单涡旋、开口右向单涡旋、双涡旋、二倍周期等。

6 实验结果与讨论

6.1 基础蔡氏混沌电路实验

首先我们进行了实验仿真，在仿真实验中，我们通过取 L 为定值 20mH ，并调节 $R1$ 从 0 到 2000Ω ，发现相图的变化为：

直线 $\rightarrow$ 极限环 $\rightarrow$ 双涡旋因子 $\rightarrow$ 单涡旋吸引子 $\rightarrow$ 三周期 $\rightarrow$ 四周期 $\rightarrow$ 二周期 $\rightarrow$ 单周期。

当阻值为 2000Ω 时，其最终收敛到单周期，即一个圆环。期间我们通过给电路某些初始值进行了左右周期的模拟。

对于真实实验，其也出现了相同的现象，其电路图如图6所示，将滑动变阻器从左向右以及从右向左调节在同一阻值处所呈现的混沌现象不一致。

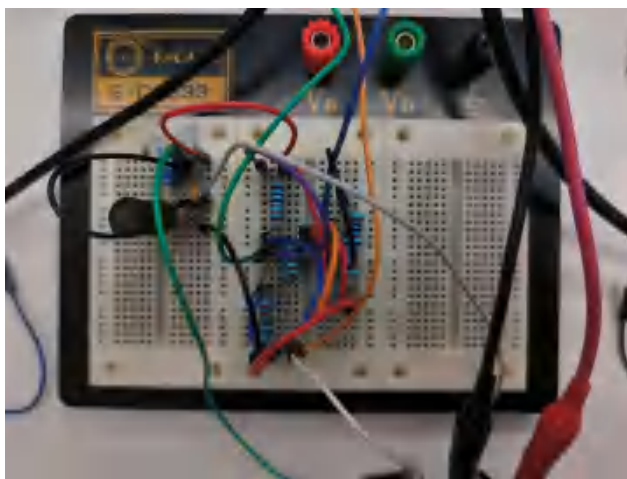


图 6: 基础蔡氏混沌电路实际电路图

仿真与实验数据如表2所示，实验与仿真图像如图7所示

表 2: 基础实验数据

混沌现象	仿真范围 R/Ω	实验范围 R/Ω
直线	0-0	0-36.3
极限环	0-1865.6(1535.2)	36.3-1388(1280)
双涡旋	1865.6(1535.4)-1899.2	1388(1280)-1476
单涡旋	1899.4-1927	1476-1815

¹ 括号内为从大到小调节数值。
² 实验电路与实际电路有些差别，其滑动变阻器直接连接第二引脚，但对实验并无影响，因为另一段直接被短接。

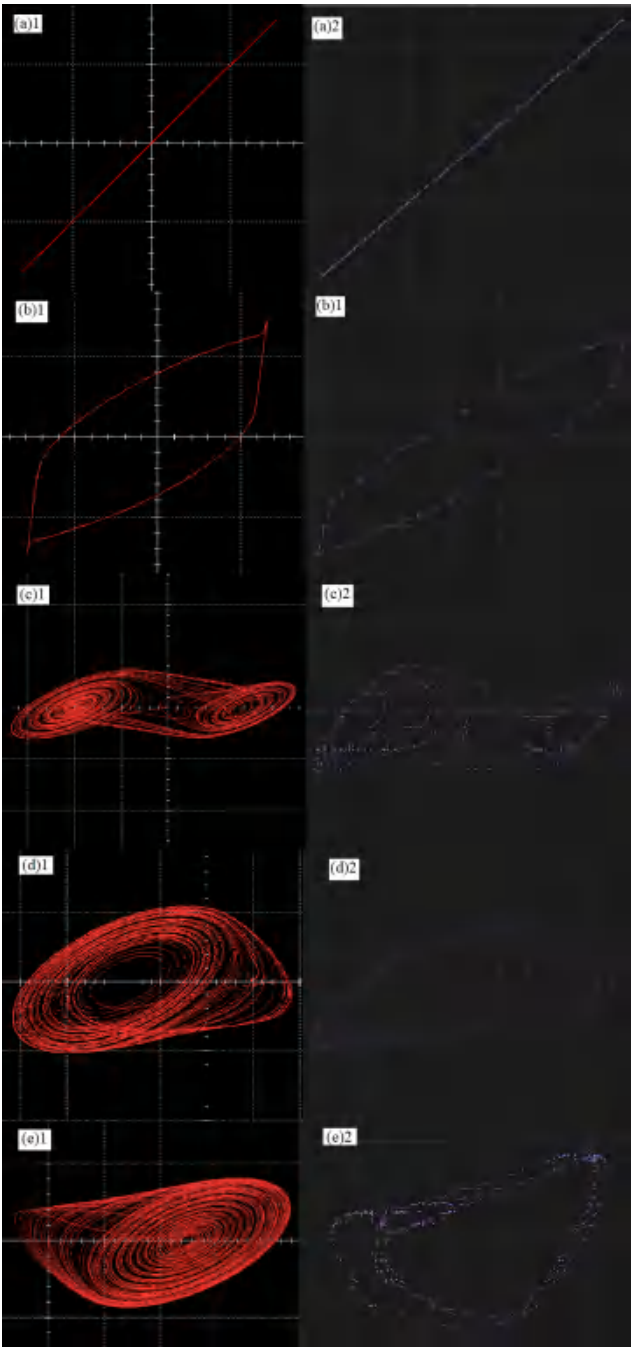


图 7: 基础蔡氏混沌电路混沌现象图¹

由于实验中电路元件参数并不精确，其电路并非完全对称，故其很难调出各种特殊混沌现象，我们在实验中仅仅调出了某些特殊现象，其电阻如表3所示

表 3: 基础实验混沌现象特殊类型

混沌现象类型	特殊位置 Ω
左三周期	1487
左四周期	1521
左双周期	1585
左单周期	1665
右双周期	1574

其现象我们整合为图8所示

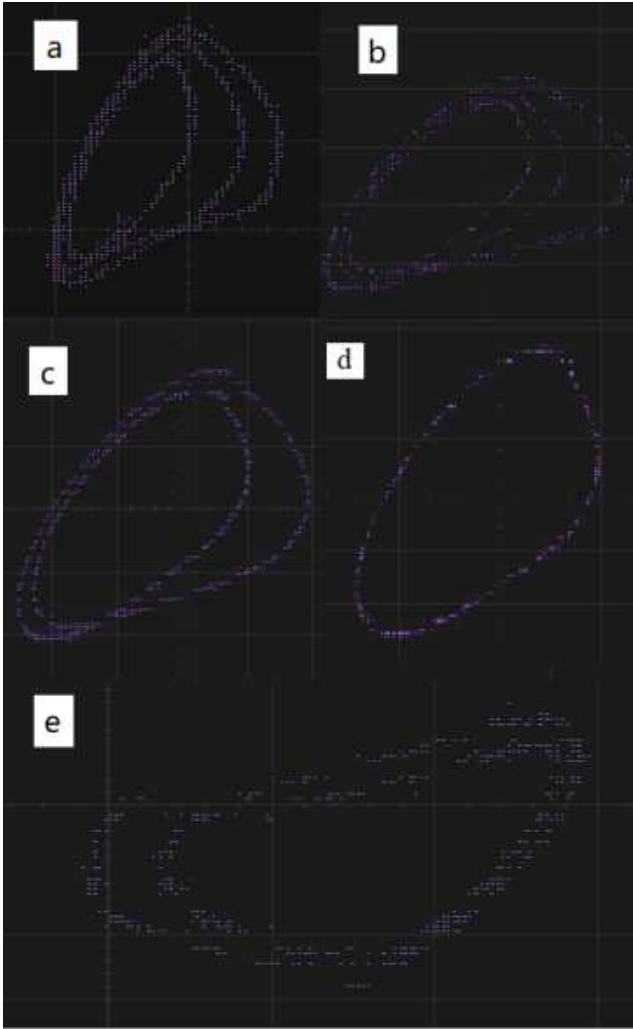


图 8: 基础蔡氏混沌电路实验特殊现象图²

¹ 左侧为仿真图像，右侧为实验图像，从上到小分别为直线、极限环、双吸引子、左单吸引子、右单吸引子
² 其中 a-e 顺序即为表3从上到下的顺序。

仿真中某些特殊位置我们给出其电阻如表4所示

表 4: 基础仿真混沌现象特殊类型

特殊位置 R/Ω	左侧三周期 1928.6	左侧四周期 1937	左侧双周期 1946	左侧单周期 1956
	右侧三周期 1927.2	右侧四周期 1935.2	右侧双周期 1939	右侧单周期 1953

其现象如图9所示

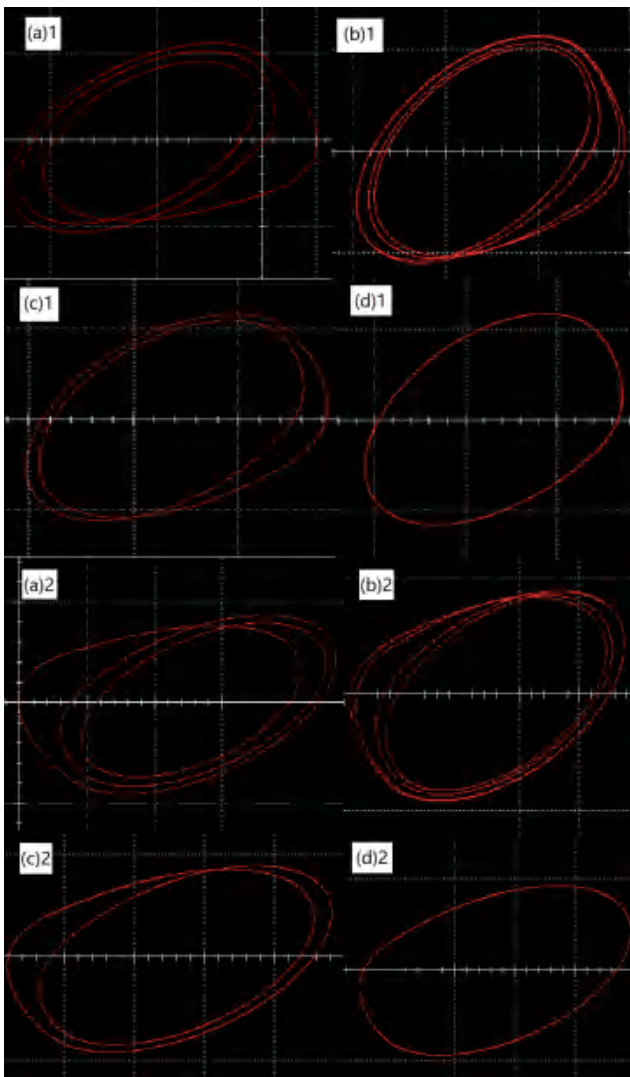


图 9: 基础蔡氏混沌电路仿真特殊现象图³

现象分析:

根据图像对比, 可以发现其所呈现出的混沌现象图片基本一致, 所以仿真与实验都能实现混沌现象的观测, 但我们发现, 实验与仿真对应同一混沌现象时的

³标号 1 为左侧图像, 标号 2 为右侧图像, a-d 分别为三周期、四周期、双周期、单周期

电阻不一致, 因为实际实验中, 各个元件的参数无法保证一致, 可能导致其与仿真实验不一致。

实际上, 可以发现, 实际实验的阻值均小于仿真实验的阻值约 400Ω , 可能是由于数字万用表测量的阻值并不精确导致的, 并且我们发现, 实际实验难以得到右侧的混沌图像, 故可能是由于接触电阻、导线电阻等因素导致其电路偏左, 故难以得到右侧图像, 这是实际实验难以避免的, 正如我们后面要考虑的拓展实验, 其也出现了相同的现象, 故实际实验的元件值对实验影响巨大。

并且, 电路中的运算放大器影响也十分巨大, 我们在实验中使用了两个芯片进行实际操作, 对于第一个芯片, 无论从小到大或从大到小调节, 其无法出现双吸引子, 而是直接从极限环跳跃至左单吸引子, 同样无法调节出右侧图像。但后来我们更换了一个芯片, 其电路对称性进一步平均, 使得我们可以调节出短暂的右侧图像以及双吸引子图像, 但双吸引子的阻值范围仍然较小, 可以看出运算放大器芯片影响也十分巨大。

改进方案:

实际上, 我们在实验过程中发现了这个问题, 因此我们尝试对某些电阻进行串联以改变其阻值, 进而使得混沌电路状态向右方偏移, 当时是可以调节出较为明显的右侧单吸引子图, 可见阻值对电路的影响巨大。但为了保证仿真和实际实验的一致性, 我们并未记录改变电路后的图像和阻值, 这也是实验可以改进的地方, 进行串联小电阻, 从而实现更加精确的电路对称性。

并且我们可以测量运算放大器的各个特征, 保证两侧运算放大器的特性是一致的, 因为运算放大器的不对称性也会影响电路呈现混沌状态。

6.2 混沌电路分析

在实验过程中, 我们发现, 在调节电感后其现象会发生改变, 增大电感与减小电阻的现象几乎一致, 故我们猜测, 实际上的混沌电路是由电阻与电感的比值有一定的关系, 且电阻过小时也难以调出混沌现象, 我们尝试对电路方程9进行无量纲化处理。

$$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{u_{C2} - u_{C1}}{R_1} - f(u_{R_N}) \\ C_2 \cdot \frac{dU_{C2}}{dt} = i_L - \frac{u_{C2} - u_{C1}}{R_1} \\ L \cdot \frac{di_L}{dt} = -U_{C2} \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$f(u) = G_b u + \frac{1}{2} (G_a - G_b) [|u + E| - |u - E|] \quad (10)$$

得:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_1 - m_0) & , x \leq -1 \\ m_0 x & , -1 \leq x \leq 1 \\ m_1 x + (m_0 - m_1) & , x \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

式中, x, y, z, α, β 等都是无量纲量, 他们的定义是: $x = u_1/E, y = u_2/E, z = Ri_L/E, \tau = t/RC_2, m_0 = RG_a, m_1 = RG_b, \alpha = C_2/C_1, \beta = C_2 R^2/L$ 。

我们发现, 微分方程的解只与无量纲参量 α, β, m_0, m_1 有关, 而且这四个量只有 $\beta = C_2 R^2/L$ 与电感值有关, 因此这样的系统的并不取决于电感值本身, 而可以通过调节电容、电阻值达到一样的效果。

并且, 我们发现混沌电路对初值的敏感性极强。对于周期性的相图, 左侧与右侧的对应周期数目的电阻值几乎一样, 实际上, 意味着左右侧的周期相图与电阻值并非一一对应, 而是这个电阻值能够同时产生左右侧的周期数的相图。事实上, 系统的状态是与初值 (也可以说是系统的历史) 是息息相关的。

实际上, 这也是混沌电路的特性之一, 对应不同的初始值可能有多个解, 当我们每次关闭电路以 0 状态开始, 此时我们可以发现, 此时与动态调节的混沌现象不一致, 对于仿真来讲, 在 R_1 阻值大约为 1900Ω 以上时, 不会再产生右侧的吸引子或者周期相图, 这恰好证明了初值对混沌电路的重要影响。

6.3 拓展实验

对于基础的蔡氏混沌电路, 我们进行拓展实验, 经过查阅文献, 我们搜索到了另一种蔡氏混沌电路, 其在本文的文献 2 中。

在实际实验中, 电感一般都有一定的阻值, 而蔡氏混沌电路中应用理想电感, 但理想电感较难制作, 故我们考虑用模拟电感进行蔡氏电路的优化。

模拟电感的实现方式有多种, 我们在此利用运算

放大器以及电容、电阻进行实现, 由于这三者的数值较为稳定, 所以使得混沌电路更加容易调试。

一种有源模拟电感如图10所示

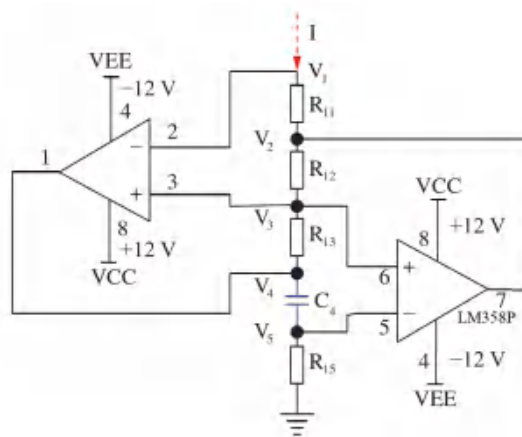


图 10: 一种有源模拟电感

利用理想运算放大器的性质, 有虚短虚断, 即可得出以下方程

$$\begin{aligned} V_1 &= V_3 = V_5 \\ I &= (V_1 - V_2)/Z_1 \\ (V_3 - V_2)/Z_2 &= (V_4 - V_3)/Z_3 \\ (V_5 - V_4)/Z_4 &= -V_5/Z_5 \end{aligned} \quad (13)$$

利用以上方程即可得到模拟阻抗

$$Z = \frac{V_1}{I} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \quad (14)$$

若将 1,3,5 全部置为电阻, 2 或 4 中某一个利用电容, 即可模拟出电感。这种电感更加稳定且不包含阻值。其值为

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4}{R_2} \quad (15)$$

对于这种混沌电路, 其能够产生较多的相图, 且我们进行初步仿真后发现效果较好, 故选用此混沌电路进行实验以及仿真和数值求解。其动力学方程与之前一致, 即公式2, 其元件值与基础蔡氏混沌电路不一致, 在此不再过多论述。

按照图5进行搭建实验电路, 其实验电路图如11所示

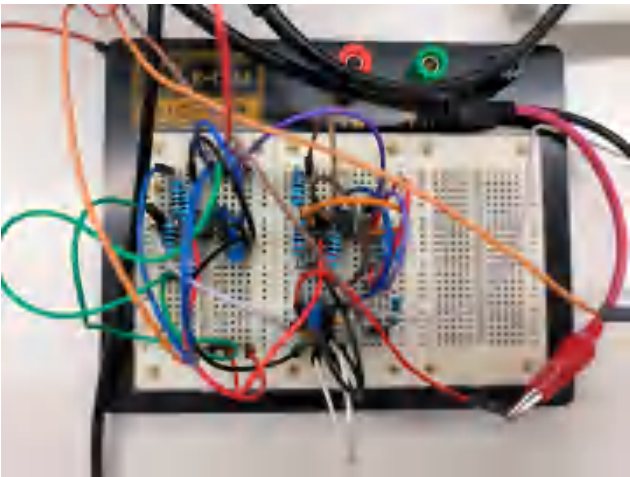


图 11: 拓展蔡氏混沌电路实验电路图

搭建好电路后，我们调节滑动变阻器并进行测量，可以发现其相图也较为丰富，仿真与实验数据如表5所示

表 5: 拓展实验数据

混沌现象	仿真范围 R/Ω	实验范围 R/Ω
直线	0-0	0-5.1
极限环	0-1823(1303.8)	5.1-1464.9(1229.7)
双涡旋	(1303.8-1818.4)	1464.9-1539.4(1229.7-1521.4)
单涡旋	1823-1958.6(1818.4-1952.8)	1539.4-1644.6(1521.4-1637.3)

- ¹ 括号为从将滑动变阻器大到小调节的数值。
- ² 仿真从小到大调节时其并未产生双吸引子，可能由于初值影响过大导致的，而实验中电路的波动性很强，噪声较大，故可能在某些时刻跳入别的相图，故实验中从小到大调节时能够产生双吸引子。
- ³ 我们可以看出，从大到小调节时双吸引子的阻值范围均明显增强，可见初值对实验影响十分巨大。

我们也调节出了部分特殊混沌现象图，其表格如表6所示

表 6: 拓展蔡氏电路特殊混沌现象

特殊混沌现象	实验阻值/ Ω	仿真阻值/ Ω
左侧四周期	1564.9	无
左侧双周期	1587.1	1893.2
左侧单周期	1623.2	1906.2
右侧双周期	无	1874.6
右侧单周期	无	1908.2

¹ 由于实验电路并非完全对称的缘故，实验中并未调节出右侧的特殊相图，且仿真中也并未调节出四周砌和三周期相图。

其仿真与实验的对比图如图12所示

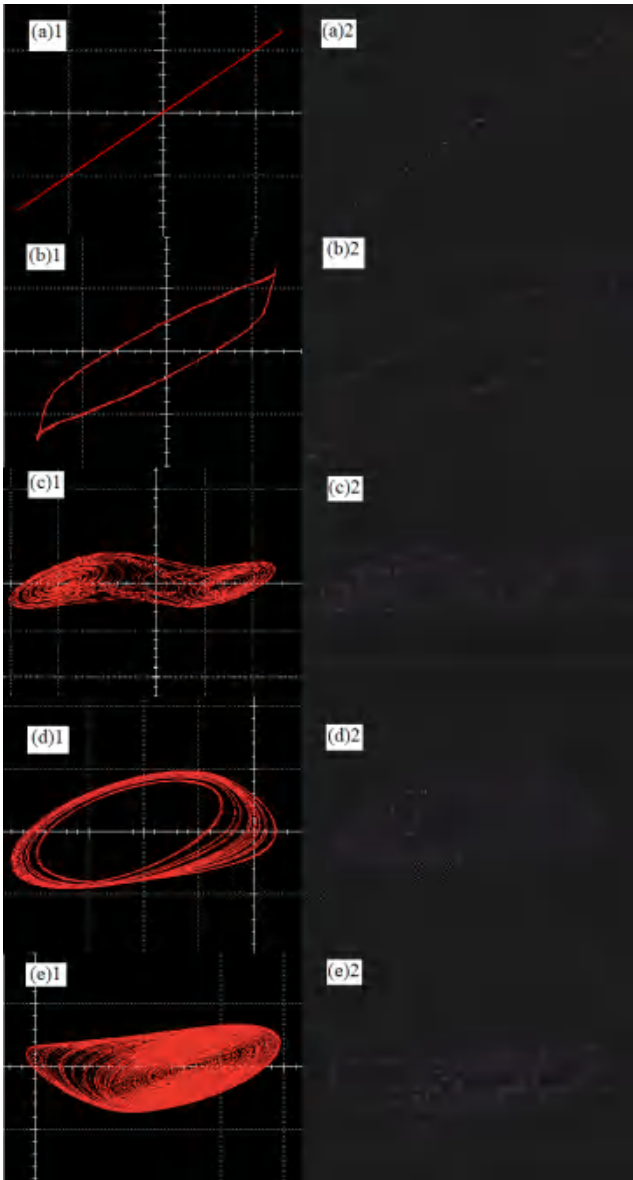
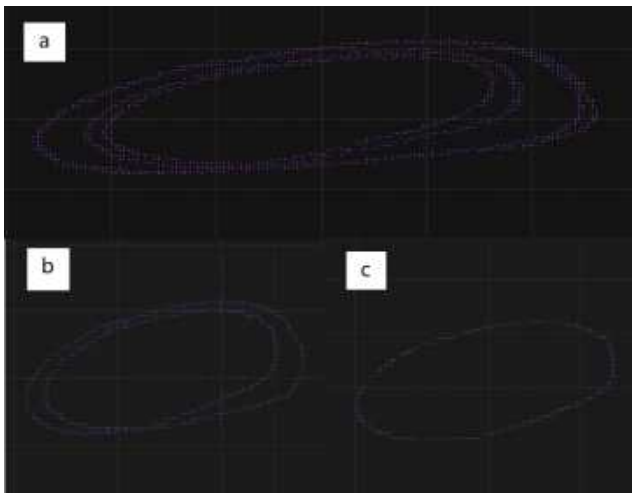


图 12: 拓展蔡氏混沌电路混沌现象图⁴

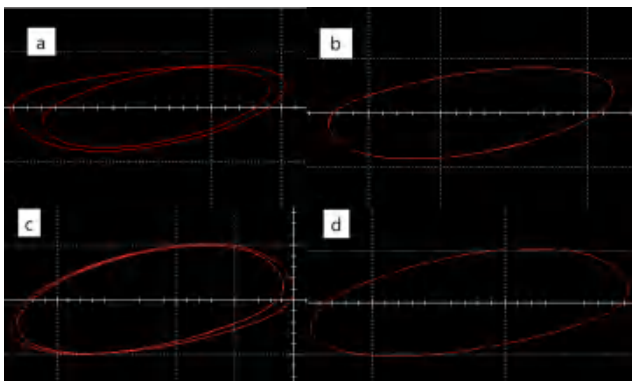
从图中可以看出，实验与仿真效果较好，实验与仿真皆实现了各种相图的观测，但对于实验和仿真同一相图所对应的阻值并非十分接近，其产生原因可能是由于数字万用表测量并非十分精确，以及实验电路中元件有较大的误差，并且实验中不可避免有许多误差，比如接触电阻，温度影响等，但其相图基本一致，故效果较好。

其实验特殊位置相图如图13所示

⁴ 左侧为仿真图像，右侧为实验图像，从上到小分别为直线、极限环、双吸引子、左单吸引子、右单吸引子

图 13: 拓展蔡氏混沌电路实验特殊相图⁵

仿真特殊位置相图如图14所示

图 14: 拓展蔡氏混沌电路仿真特殊相图⁶

可见，我们也实现了许多特殊位置相图，实验中由于电路的不对称性，其右侧相图十分难以出现，而对于仿真，其电路虽然有极强的对称性以及准确性，但可能由于电阻调节最小阻值限制的原因，仿真并未调节出三周期以及四周期相图。

但实际上我们也已经给出了较多相图，拓展实验较为成功。

6.4 数值求解

我们分别对 Lorenz 混沌系统、基础蔡氏混沌电路以及拓展蔡氏混沌电路进行了数值求解。

⁵图中 a 为左侧四周砌，b 为左侧二周期，c 为左侧单周期

⁶图中 a 为右侧双周期，b 为右侧单周期，c 为左侧双周期，d 为左侧单周期

6.4.1 Lorenz 混沌系统

Lorenz 系统是 Edward Lorenz 在 1963 年求解大气流动动力学方程模型是化简得到的一个常微分方程组，被认为是最早的混沌系统实例。其动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (16)$$

上式中 σ 为普朗特常数，一般情况下取 10， ρ 是瑞利常数，取值随气体条件不同而发生变化， $\beta=8/3$ 。我们在主要研究瑞利常数以及初值对系统状态的影响。

我们利用 MMA 对此系统进行了求解，首先考虑瑞利常数的影响，给出较为直观的几种情形，其结果如图15

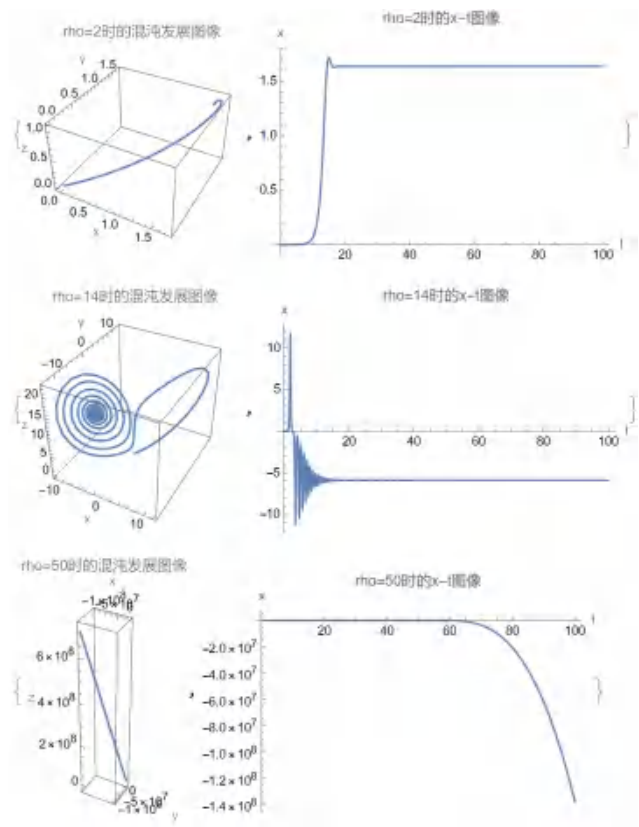


图 15: Lorenz 系统求解 (瑞利常数)

其分别为瑞利常数为 2、14 和 15 时的情形。

首先，对于 2 的情形，可以看出，例子从某点出发，迅速被某个点吸引，并最终稳定；对于 14 的情形，粒子经过较大的摆动后，逐渐被吸引，在多次徘徊后到达稳定点，相比 2 来讲其吸引力减弱了；最后，对于 50

的情形,可以看出其最终无法收敛,三个坐标均趋于无穷大,此时此混沌体系已经不再存在吸引子了。

综上可以定性看出,瑞利常数决定了吸引子强度的大小,其越大,吸引子强度越小,即瑞利常数决定着稳定点是否存在、粒子到达稳定点的时间等等。

然后我们考虑初值的影响,利用瑞利常数为 21 时微小初值的差别,进行求解,有如下结果

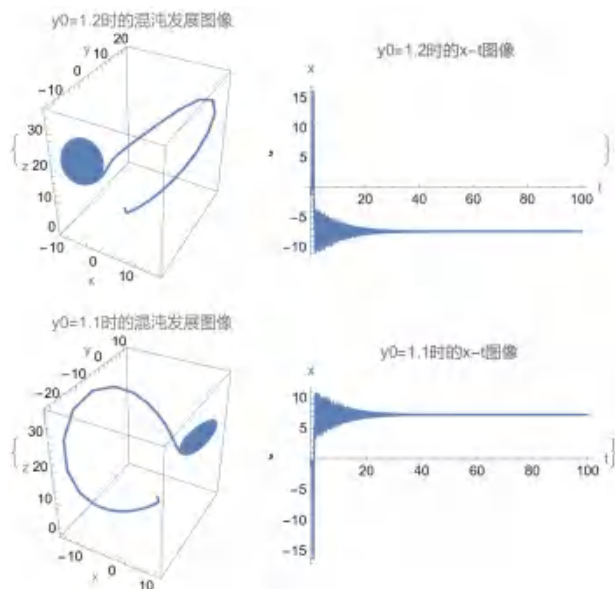


图 16: Lorenz 系统求解 (初始状态)

可以看出,初始状态 y 仅仅相差 0.1,就决定了其被左右吸引子而吸引。初值影响巨大。

然后我们调节了状态,令 $\beta=3$,瑞利常数为 26.5 状态下即可得出双吸引子。

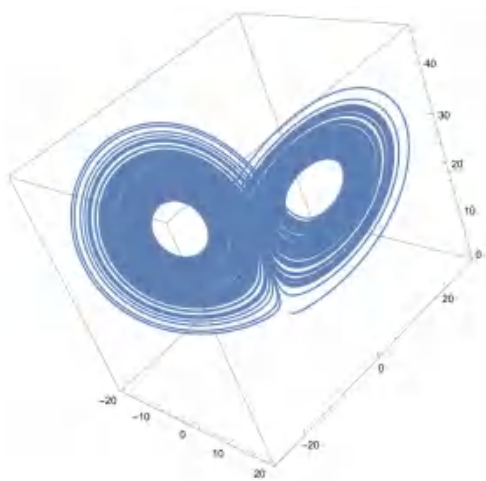


图 17: Lorenz 系统求解 (双吸引子图)

综上,我们利用 Lorenz 系统数值求解研究了混沌系统的各个参数以及初始值的影响,各个混沌系统一般都会产生这些影响,我们在后面仅进行蔡氏混沌电路的相图调试,不再对其初值、参数的作用进行讨论。

6.4.2 基础蔡氏混沌电路

如图4为所求解电路,此时电感值为 20mH,利用归一化后的方程进行求解,方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot (y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{dt} = b \cdot (x - y + z) \\ \frac{dz}{dt} = -c \cdot y \\ f(x) = m_b \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (m_a - m_b) \cdot (|x + 1| - |x - 1|) \end{cases} \quad (17)$$

利用 MMA 通过调试参数,即可得到基础蔡氏混沌电路双吸引子的图像如图18所示

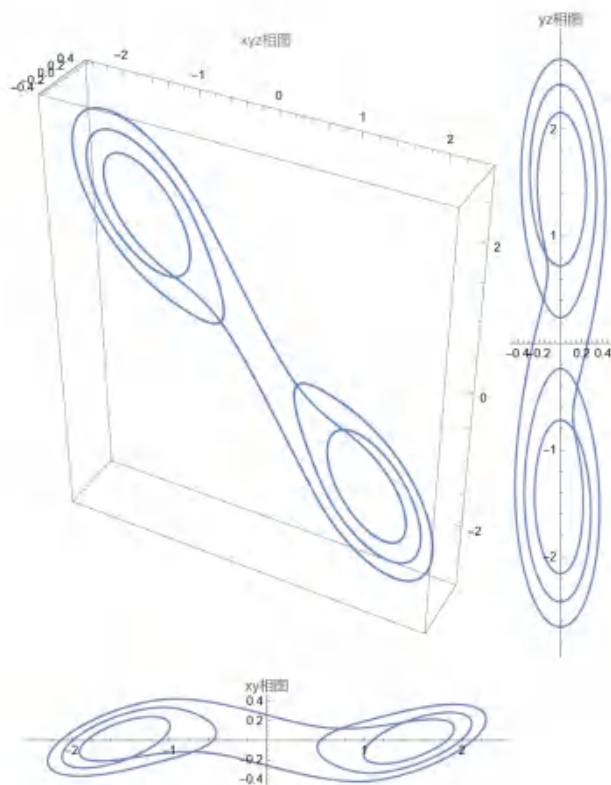


图 18: 蔡氏电路系统求解 (双吸引子图)

图18参数为 $a=42.6, b=12, c=50, m_a=-1.143, m_b=-0.714$ 。

6.4.3 拓展蔡氏混沌电路

如图5为所求解电路，此时方程等效电感值为 1.8mH ，利用归一化后的方程进行求解

利用 MMA 通过调试参数，即可得到拓展蔡氏混沌电路双吸引子的图像如图19所示

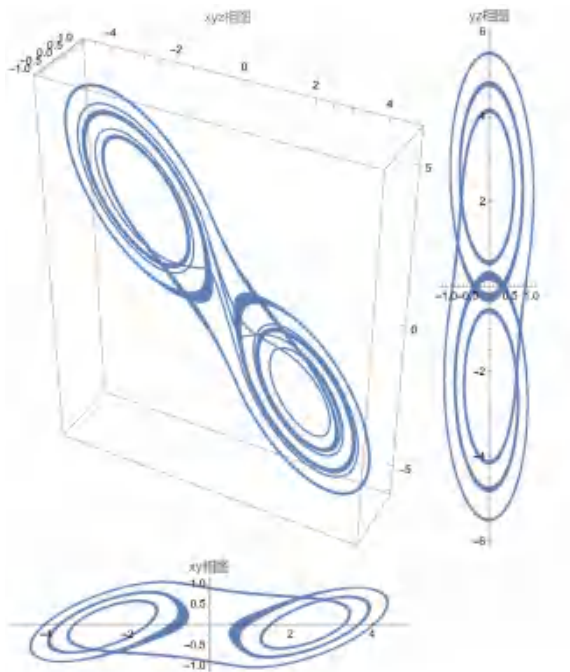


图 19: 拓展蔡氏电路系统求解 (双吸引子图)

图19参数为 $a=455.5$, $b=120$, $c=555.555$, $ma=-1.143$, $mb=-0.714$ 。

6.4.4 补充图像

基础蔡氏混沌电路下，数值求解出了部分其余图像，如图20-23所示

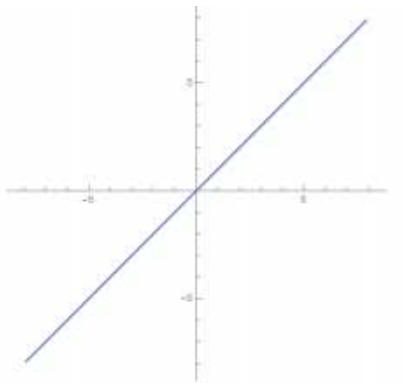


图 20: 蔡氏电路系统求解 (直线图)

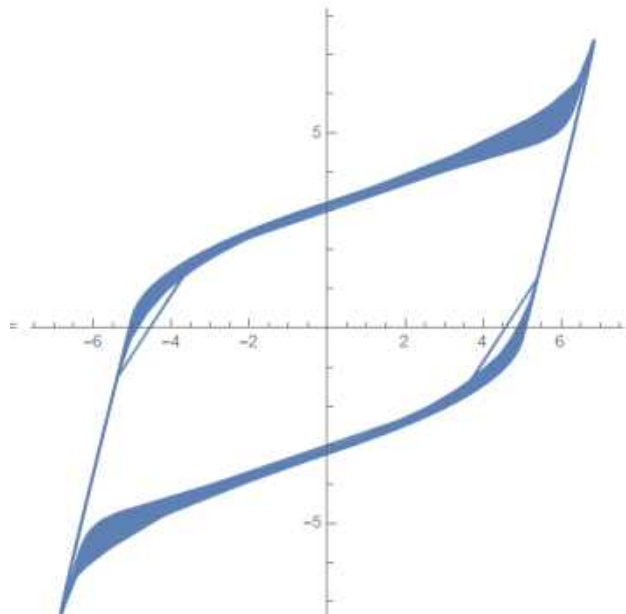


图 21: 蔡氏电路系统求解 (极限环图)

直线对应电阻阻值为 0 ，极限环对应阻值为 1000Ω ，其阻值与实验、仿真基本一致。

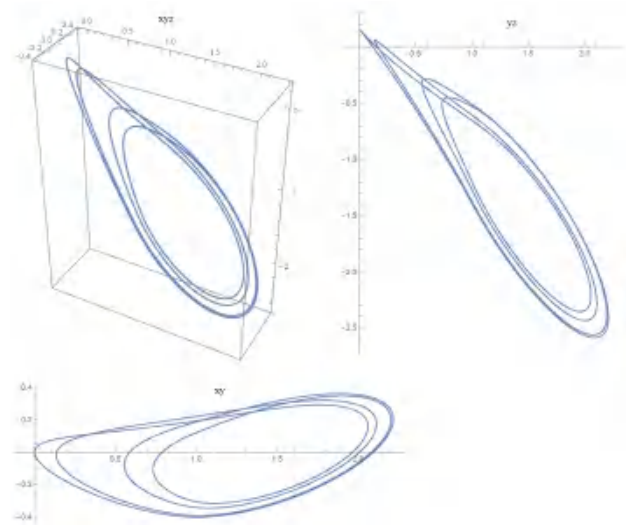


图 22: 蔡氏电路系统求解 (单吸引子图)

图22参数为 $a=42.1$, $b=13$, $c=50$, $ma=-1.143$, $mb=-0.714$ 。

在拓展蔡氏混沌电路下，由于直线与极限环大致一致，我们在此给出其单吸引子图像。

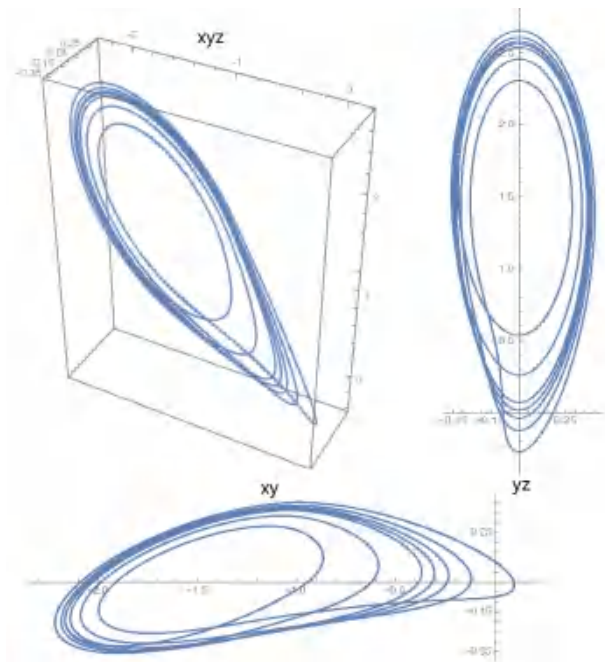


图 23: 拓展蔡氏电路系统求解 (单吸引子图)

图23参数为 $a=450, b=120, c=555.555, ma=-1.143, mb=-0.714$ 。

实际上也可以调节出某些周期相图，我们在调节过程中调节出了单周期与二周期图，在此不再过多论述。

7 结论

首先，我们进行了基础蔡氏混沌电路实验，进行了实际实验以及仿真实验，通过从小到大调节以及从大到小调节阻值获得了其相图出现的阻值区间，并且通过细致调节，得到了各种特殊相图，并且给出了其精确阻值，实验与仿真相图皆十分明显；但我们发现，其产生同一种相图的电阻有着较大的偏差，整体偏差均在 300Ω 左右，故我们猜测可能有一些系统误差，可能是实验测量电阻不够精确，以及元件误差、接触电阻导致的，但整体实验现象一致，阻值区间以及阻值整体变化趋势均一致，基础实验较为成功。

然后我们进行了拓展实验，通过检索文献，利用文献 2 中的混沌电路，我们进行了实际实验以及仿真实验，并且也从两个方向调节电阻，获取了其阻值区间，并且调节出了较为丰富的相图，包括部分周期相图，从给出的相图可以发现，实验、仿真现象基本一致，虽然阻值仍然如基础蔡氏混沌电路出现了 300Ω 左右的偏差，故我们认为其可能是实际电路导致的系统误差，并

非是人为的操作失误。其阻值整体变化趋势也基本一致，拓展实验较为成功。

最后我们进行了数值求解，首先求解了经典的 Lorenz 系统，观测了初值与参数对系统混沌状态的影响，然后对两种蔡氏混沌电路进行编程求解，调出了直线、极限环、双吸引子和单吸引子图像，实验较为成功。

整体来讲，我们在实验电路有着极大地不对称性情况下，以及元件误差较大的条件下，调节出了各种混沌相图，且进行了仿真与数值求解，三者相图均清晰可见，实验较为成功。

参考文献

- [1] 杨文杰, 张帆, 郑前前. 一类 Lorenz 型系统中的混沌分析 [J]. 许昌学院学报, 2022, 41(02): 8-11.
- [2] 刘恒, 刘远林, 吴朝阳, 孙亚坤, 刘泽. 一种蔡氏混沌电路实验设计 [J]. 实验科学与技术, 2020, 18(06): 8-13.
- [3] 王玉品. 分数阶非线性动力系统分形分析与控制 [D]. 山东大学, 2021.
- [4] 何颖辉. 新型多翼混沌系统及其电路设计 [D]. 重庆邮电大学, 2020.
- [5] 万求真, 周昭腾. 具有多参数恒 Lyapunov 指数谱的新型统一混沌系统 [J]. 通信学报, 2020, 41(06): 202-213.
- [6] 邱关源, 罗先觉. 电路 (第 5 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 115-122
- [7] 沈韩等. 基础物理实验 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

A 附录

A.3 Mathematica 代码

A.1 原始数据

原始数据已记录于教师签名页以及上传至 seelight 中。

A.4 教师签名页

A.2 思考题

1. 检索资料，检索至少一种非本实验讲义提供的混沌电路，并进行仿真，给出仿真电路和仿真结果。

此部分已经在扩展实验中进行，并且我们进行了实验搭建、仿真模拟以及数值求解。

2. 检索资料，简述混沌电路的可能应用。要求给出参考文献。

①用于人工智能系统实验预测中。

[1]Zhang C, Jiang J, Qu SX, Lai YC. Predicting phase and sensing phase coherence in chaotic systems with machine learning. Chaos. 2020 Aug;30(8):083114.

②用于视频图像加密。

[1] 涂立, 汪彦. 一种基于 Lorenz-Duffing 混沌系统的视频图像加密新算法 [J]. 湖南城市学院学报 (自然科学版),2022,31(05):67-72.

[2] 吕晏旻, 闵富红, 彭光娅, 张若飞. 异构磁控忆阻混沌电路的同步及其在彩色图像加密中的应用 [J]. 南京师范大学学报 (工程技术版),2019,19(01):8-18.

③用于微弱距离信号检测。

[1] 王晓媛, 周鹏飞, 王光义, 陈瑾. 基于自制音频示波器的混沌电路微弱距离信号检测系统设计 [J]. 实验技术与管理,2020,37(01):101-104+121.

④用于自供能以及无线通讯。

[1] 何李毅. 混沌电路在自供能系统和无线通信中的应用初探 [J]. 中国新通信,2018,20(07):114.

[2] 张玉静. 混沌电路在自供能系统和无线通信中的应用 [D]. 兰州大学,2016.

⑤应用于保密通讯工程领域。

[1] 王维. 忆阻混沌电路设计及其在保密通信中的应用 [D]. 湘潭大学,2016.

[2] 崔力. 混沌电路及其在保密通信中的应用研究 [D]. 湖南科技大学,2010. [3] 闫少辉. 混沌电路分析及其在保密通信中的应用研究 [D]. 西北师范大学,2007.

英文摘要在文章最后!

```

<In = 31;
sol = Table[{x[t], y[t], z[t]} /. NDSolve[{x'[t] == sigma (y[t] - x[t]), y'[t] == -rho x[t] - x[t] z[t] + y[t] z'[t] + x[t] y'[t] - beta z[t], z'[t] == -1, y[0] == 0, z[0] == 2}, {x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 200}, MaxSteps -> 10000][[1];
Table[ParametricPlot3D[sol[[i]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full], {i, 1, 99}];

ParametricPlot3D[sol[[2]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714", AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, Plot[sol[[2], 1], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, AxesLabel -> {"t", "x"}, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714"];
ParametricPlot3D[sol[[3]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714", AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, Plot[sol[[3], 1], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, AxesLabel -> {"t", "y"}, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714"];

```

图 1: Lorenz 系统求解代码 (1)

```

<In = 32;
sol = Table[{x[t], y[t], z[t]} /. NDSolve[{x'[t] == sigma (y[t] - x[t]), y'[t] == -rho x[t] - x[t] z[t] + y[t] z'[t] + x[t] y'[t] - beta z[t], z'[t] == -1, y[0] == 0, z[0] == 2}, {x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 200}, MaxSteps -> 10000][[1];
Table[ParametricPlot3D[sol[[i]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full], {i, 1, 99}];

ParametricPlot3D[sol[[2]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714", AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, Plot[sol[[2], 1], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, AxesLabel -> {"t", "x"}, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714"];
ParametricPlot3D[sol[[3]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714", AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, Plot[sol[[3], 1], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, AxesLabel -> {"t", "y"}, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714"];
ParametricPlot3D[sol[[4]], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714", AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, Plot[sol[[4], 1], {t, 0, 200}, PlotRange -> Full, AxesLabel -> {"t", "z"}, PlotLabel -> "rho = 1.143, beta = 0.714"];

```

图 2: Lorenz 系统求解代码 (2)

```

Definiere rho = 1.143; beta = 0.714;
sol = Table[{x[t], y[t], z[t]} /. NDSolve[{x'[t] == sigma (y[t] - x[t]), y'[t] == -rho x[t] - x[t] z[t] + y[t] z'[t] + x[t] y'[t] - beta z[t], z'[t] == -1, y[0] == 0, z[0] == 2}, {x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 200}, MaxSteps -> 10000][[1];
ParametricPlot3D[sol, {t, 0, 200}, PlotPoints -> 50000, PlotRange -> Full];

```

图 3: Lorenz 系统求解代码 (3)

```

a = 42.6; b = 12; c = 50; ma = -1.143; mb = -0.714;
f[x_] := mb x + 1/2 (ma - mb) (Abs[x + 1] - Abs[x - 1]);

Clear[z];
s = NDSolve[{x'[t] == a (y[t] - x[t]) - a f[x[t]], y'[t] == b (x[t] - y[t] + z[t]), z'[t] == -c y[t], x[0] == -1.1, y[0] == 0, z[0] == 0}, {x, y, z}, {t, 0, 200}];

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. s], {t, 100, 200}, PlotRange -> Full, PlotPoints -> 10000];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 100, 200}, PlotRange -> Full, PlotPoints -> 10000];
ParametricPlot[Evaluate[{z[t], y[t]} /. s], {t, 100, 200}, PlotRange -> Full, PlotPoints -> 10000];

```

图 4: 蔡氏电路求解代码 (1)

```

a = 455.5; b = 120; c = 555.555; ma = -1.43; mb = -0.714;
f[x_] := mb x + 1/2 (ma - mb) (Abs[x + 1] - Abs[x - 1]);

Clear[z];
s = NDSolve[{x'[t] == a (y[t] - x[t]) - a f[x[t]], y'[t] == b (x[t] - y[t] + z[t]), z'[t] == -c y[t], x[0] == -1, y[0] == 1, z[0] == 1}, {x, y, z}, {t, 0, 200}];

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. s], {t, 0, 30}, PlotRange -> Full, PlotPoints -> 10000];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 100, 200}, PlotRange -> Full, PlotPoints -> 10000];
ParametricPlot[Evaluate[{y[t], z[t]} /. s], {t, 100, 200}, PlotRange -> Full, PlotPoints -> 10000];

```

图 5: 蔡氏电路求解代码 (2)

实验C9.2 李氏混频电路实验

实验人: 路尚润 学号121302127

实验时间: 2023年9月14日下午

实验地点: 陆裕堂

[实验目的]

1. 学习和使用NI ELVIS平台和Virtual Bench的使用方法
2. 用LabVIEW对NI Virtual Bench进行编程, 完成混频电路的搭建和实验
3. 掌握李氏混频电路的工作原理

[实验原理]

在C9.1的仿真基础上, 利用硬件和软件李氏混频电路, 将仿真结果验证

1. NI Virtual Bench搭建

NI Virtual Bench是用LabVIEW编程控制的多功能仪器, 集成了混合信号示波器, 函数发生器(FGEN), 数字万用表, 数字I/O和直流电源等多种仪器的功能。为方便使用, 该仪器已编制了Virtual Bench虚拟仪器驱动程序, 可以直接使用, 若需要用LabVIEW对平台进行编程控制, 进行二次开发, 则需要LabVIEW 2005及以上版本, 此时需同时安装Virtual Bench 18.0驱动程序。

[安全注意事项]

- (1) 在整个实验过程中, NI Virtual Bench-PCI 板化经的混合信号示波器输入通道CH1和CH2输入电压的峰值不能超过40V, 而数字通道/逻辑分析仪端口的输入电压范围必须在0V~5V之间, 否则会损坏传感器。
- (2) 在整个实验过程中, 数字万用表输入PL电源和AC电源分别为最高至320VDC或265V AC rms, 40 ACPeak。

② [实验内容步骤]

1. 李氏混频电路搭建

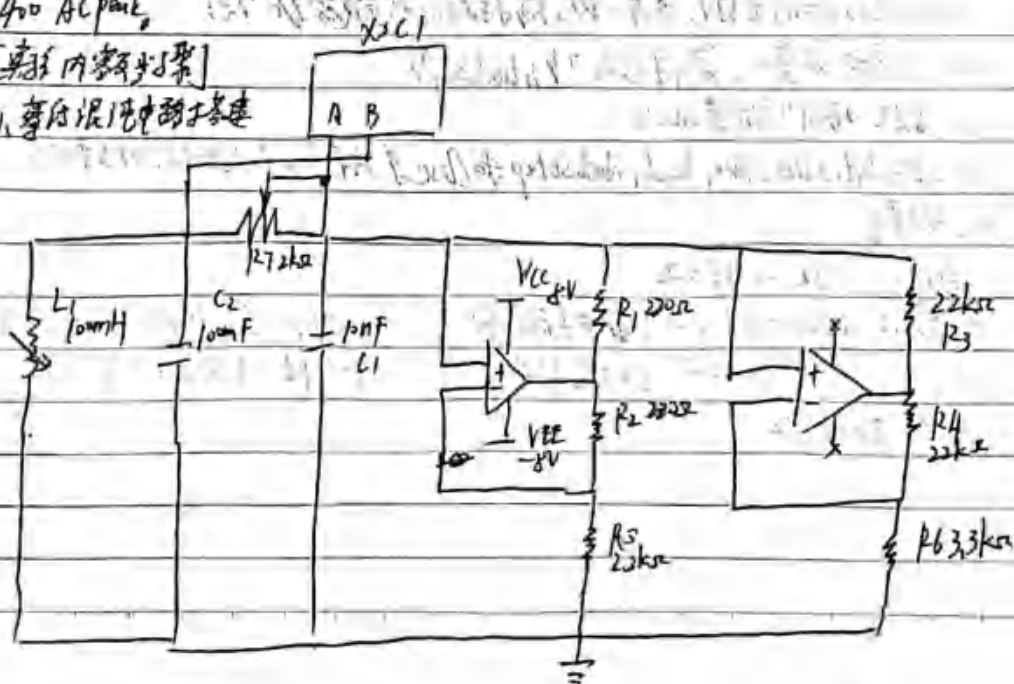


图6: 实验数据及签名页 1

实验 C9.3 混沌电路实验—拓展实验

实验人: 路希同 学号: 21305127

陈

实验时间: 2022年4月28日下午

实验地点: 陆教基

[实验目的]

1. 利用 Multisim 仿真软件, 仿真混沌混沌电路。
2. 基于 LabVIEW 平台, 编程生成混沌混沌电路吸引子图形。
3. 自主搭建混沌混沌电路。

[仪器用具]

ELVIS II+ 平台及原型板一套, NI Virtual Patch-802 一块无仪器, 关于测控控制用计算机, 电子元器件若干, 面包板两块, 导线若干。

[实验原理]

在实验 C9.1 (混沌电路) 和实验 C9.2 的基础上, 利用 Multisim 电路仿真平台, 对自己搭建的混沌电路进行仿真, 再用 LabVIEW 软件根据自己编写的程序生成吸引子图形, 将计算结果、仿真结果和实验结果进行对比。

混沌现象的产生原理是由美国科学家于 20 世纪 70 年代在研究非线性 (beyond) 对混沌现象的基础上提出的。混沌现象在非线性系统中, 非线性电路是产生混沌现象的一种混沌电路, 原理如图 1 所示, 非线性电阻 R_1 的伏安特性如图 2 所示。

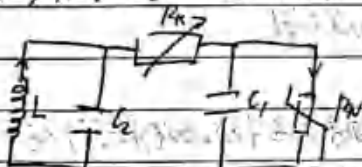


图1: 非线性电路原理图



图2: 非线性电阻伏安特性

其动力学方程可写为:

$$\begin{cases} \frac{dU_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} \cdot (U_{C2} - U_{L1}) - \frac{1}{C_1} \cdot f(U_{R1}) \\ \frac{dU_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot (U_{C2} - U_{L1}) \\ \frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \cdot U_{C2} \end{cases}$$

$$f(U_{R1}) = G_0 \cdot U_{R1} + \frac{1}{2} \cdot (G_a - G_b) \cdot (|U_{C1} + E| - |U_{C1} - E|)$$

其中 G_0 为内阻电导, G_a 是外阻电导, G_b 是内阻电导与外阻电导之差。

$$f(U_{R1}) = \begin{cases} G_0 \cdot U_{R1} + E \cdot (G_a - G_b) & U_{C1} \geq E \\ G_0 \cdot U_{R1} & -E \leq U_{C1} \leq E \\ G_0 \cdot U_{R1} - E \cdot (G_a - G_b) & U_{C1} \leq -E \end{cases}$$

1. 写出蔡氏混沌电路方程：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot (y - x) - f(x) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y \end{cases}$$

$$f(x) = m_0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (m_a - m_b) \cdot (|x+1| - |x-1|)$$

[实验步骤]

1. 编程仿真蔡氏混沌电路

不采用电路仿真软件，而是利用 LabVIEW 来仿真一种编程软件，根据方程上列有，编写程序计算，给出运动轨迹，及其在 xy 平面和 yz 平面的投影，得到双吸引子的图像

实验要求：(1) 自己编写程序，(2) 运行结果的二维和三维图形：

2. 对自建混沌电路进行仿真

自建一个与前面两图等效的混沌电路，利用电路仿真软件进行仿真。

要求：(1) 画出电路图 (2) 写出电路方程 (3) 给出仿真结果图形

3. 对自建混沌电路进行编程计算

不采用电路仿真软件，而是利用编程计算软件，对方程 (2) 的电路方程进行编程，给出运动轨迹及其在 xy 平面和 yz 平面的投影，得到双吸引子的图像

要求：(1) 自己编写程序，(2) 运行结果的二维和三维图形

4. 自建混沌电路的实验操作

利用实验室提供的元器件和面包板，自行搭建自建混沌电路。如没有找到合适的元件，可以选择蔡氏电路的近似模型。要求给出清晰的图形，如：直线，开环的半周期，开环的周期，双周期，二倍周期等

[实验结果]

例：直线：0-5.152

开环半周期：5.152-1464.95 伏到伏
5.152-1229.75 伏到伏

双吸引子：1464.95-1539.45 伏到伏
1229.75-1521.45 伏到伏

开环半周期：1539.45-1644.6 伏到伏
1521.45-1637.35 伏到伏

元件参数:

$3300\Omega \rightarrow 3275\Omega$	$100nF \rightarrow 95.8nF, 98.9nF$
$22000\Omega \rightarrow 21932\Omega, 21897\Omega$	$10nF \rightarrow 10.08nF$
$220\Omega \rightarrow 221.3\Omega, 221.9\Omega$	
$1000\Omega \rightarrow 1004.8\Omega, 1002.9\Omega$	
$2200\Omega \rightarrow 2192.7\Omega$	
$100\Omega \rightarrow 101.3\Omega$	除
$1800\Omega \rightarrow 1785.7\Omega$ (滑动变阻器)	

图 10: 实验数据及签名页 5

Experiment DX1 DX2

Experiment on Choi's Chaotic Circuits

Shangrun Lu¹

¹ School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: A deterministic dynamical system has three common stable states, equilibrium, periodic oscillation and quasi-periodic oscillation states. Chaotic oscillations are unstable but finite dynamical oscillations, and in the study of chaotic phenomena, Chua's chaotic circuit is a widely used experimental teaching circuit that can produce a large number of phase diagrams of chaotic phenomena, which can be well observed. In this paper, we first perform experiments and simulations of a basic Tsai chaotic circuit, which gives a large number of phase diagrams, including straight lines, limit loops, double attractors, left and right single attractors, and measures some of the resistance intervals, and gives some of the periodic phase diagrams. The phase diagrams are clear and obvious. Finally, we first programmed the solution of the Lorenz chaotic system, observing the relationship between the state of the chaotic system and its initial values and parameters, and then solved two types of chaotic circuits, obtaining phase diagrams of straight lines, limit loops, double attractors and single attractors. The experiments are successful.

Key words: Multisim simulation, Tsai chaotic circuits, Chaotic systems, Lorenz chaotic systems, MMA numerical solution

实验 GX1、GX2 傅里叶光学和光学全息实验

实验人：路尚润 21305127 合作人：巩元昊 21305179 指导老师：陈文杰¹

(1 中山大学物理系, 广东广州 510275)

摘要：光学是物理的一个重要分支，其学科内涵丰富，应用场景广泛；空间滤波是傅里叶光学的一个重要应用领域，是对空间光场分布进行操作的技术，可以实现图像处理等效果；全息成像是现代光学研究的主要方向，其开辟了许多光学研究的新领域，能够实现传统光学无法实现的三维成像问题。在本文中，我们首先进行了空间滤波实验，分别用实物光栅、在空间光调制器中加载一维光栅观测了傅氏面，利用狭缝实现了单方向滤波；然后观测了“光”字的高通与低通滤波，验证了高频信息部分所呈现的成像细节；之后通过加载二维光栅实现了方向滤波，通过调节狭缝方向，验证了其方向滤波的效果；接下来我们进行了全息实验，首先是计算全息部分，我们利用软件计算全息图，搭建再现光路，实现了较好的再现图；最后进行了数字全息实验，通过马赫曾德干涉仪搭建记录光路，实现了多组全息图，对每组全息图进行了数值再现，其效果较好，并且我们最后利用再现光路又对我们记录的全息图进行了再现，即实现了两组传统全息过程。实验十分成功。

关键词：傅里叶光学；空间滤波；MATLAB 数值求解；计算全息；数字全息

1 引言

光学作为物理学的一个重要分支，一直在科学研究和实际应用中发挥着重要作用。

傅里叶光学^[1]是一种研究光波传播和相互作用的数学方法，它的核心理念是将复杂光波场的传播问题分解为一系列简单的正弦波分量。这种分解使得光场的解析变得更加简洁。傅里叶光学的理念及其方法为光学应用带来了革命性的变化，尤其对于图像处理^{[2][3]}、光学通信^[4]和光学传感^[5]等领域产生了深远的影响。

空间滤波则是傅里叶光学一个重要的应用领域，它是一种根据光场频率分布对光信息进行操作的技术。通过空间滤波器，可以对光场中的高频信息和低频信息进行分离和提取，从而实现各种光学操作如图像增强、边缘检测等。在光学测量^[6]、图像处理^[7]和微纳光学和光子学^[8]等中，空间滤波技术发挥了至关重要的作用。

全息成像^[9]作为一种将三维物体的立体信息完整地记录和再现的技术，为现代光学研究提供了非常重要的基础理论和实验手段。它不仅可以解决传统成像技术无法实现的三维成像问题，还通过利用波前信息的纯粹相位分布开辟了光学加密^[10]、光学存储^[11]和全息显示等新领域。全息成像技术在航天、医学^[12]等领域具有广泛的应用前景。

在本文中，我们首先进行了空间滤波实验，利用实物以及空间光调制器实现了单方向、高通、低通以及多角度方向滤波，通过理论结合分析了成像效果；然后进行了计算全息以及数字全息过程，进行了多组的全息成像，其皆十分明显，并且最后实现了两组传统全息过程，其效果也十分明显。

2 空间频谱和滤波实验

2.1 傅立叶变换在光学成像系统中的应用

在光学信息处理中，常用傅立叶变换来表达和处理光的成像过程。设一个 XY 平面上的光场的振幅分布为 $g(x, y)$ ，可将这样一个空间分布展开为一系列基函数 $\exp[i2\pi(xf_x + yf_y)]$ 的线性叠加，即

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(f_x, f_y) \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y \quad (1)$$

其中 f_x 和 f_y 分别为 x 和 y 方向的空间频率，量纲为 L^{-1} $G(f_x, f_y)$ 和 $g(x, y)$ 互为傅立叶变换，有

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y \quad (2)$$

$G(f_x, f_y)$ 和 $g(x, y)$ 实际上是对同一光场的两种等效描述。当 $g(x, y)$ 是一个空间的周期性函数时，其空间频率是不连续的，式 (1) 和式 (2) 需写成级数展开的形式。例如空间频率为 f_0 的一维光栅，其光振幅分布展

开式为:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \exp[i2\pi n x f_0] \quad (3)$$

相应的空间频率为 $f = 0, \pm n f_0$ 。

2.2 阿贝成像理论

阿贝研究显微镜成像问题时, 提出了一种不同于几何光学的新观点, 他将被观测物看成是不同空间频率信息的集合, 相干成像过程分两步完成, 如图1所示, 第一步是入射光场经物平面 P_1 发生夫琅禾费衍射, 在透镜 L 的后焦面 P_2 (即频谱面) 上形成空间频谱, 这是衍射所引起的“分频”作用。第二步是代表不同空间频率的各光束作为新的次波源发生次波, 在像面 P_3 上互相叠加, 形成物体的像, 这是干涉所引起的“合成”作用。成像的这两个步骤本质上就是两次傅里叶变换。第一步是把物面光场的空间分布 $g(x, y)$ 变为频谱面 (P_2) 上的空间频率分布 $G(f_x, f_y)$ 。第二步再做一次逆变换, 将 $G(f_x, f_y)$ 还原到空间分布 $g(x, y)$ 。

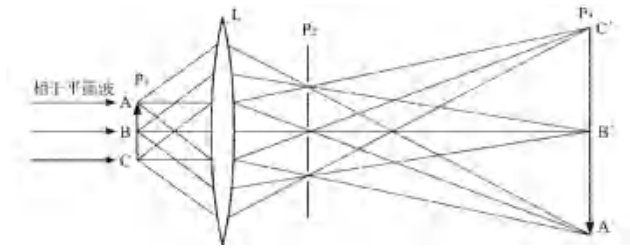


图 1: 阿贝成像原理

阿贝成像理论不仅用于傅里叶变换阐述了显微镜成像的机理, 更重要的是首次引入了频谱的概念, 启发人们用改造频谱的手段来改造信息。

2.3 光信息处理基本光路 (4f 系统)

由于任何彩色图像都可以看成是三种颜色的单色图像的合成, 因此可用单色光来说明光学信息处理的一些基本概念。图2为一种经典的三透镜光学信息处理的光路图。由于光线经过透镜之后相当于进行了一次傅立叶变换, 所以如图2所示, 激光光源发出的光线经准直透镜 L_c 之后变成相干的平行光均匀照射 P_1 平面上的待处理图像 (透明图片、光栅、或网格状文字等)。

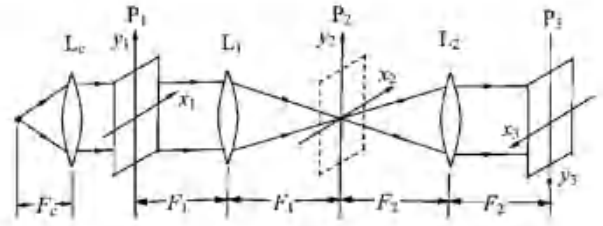


图 2: 三透镜光学信息处理系统光路图

若假设用函数 $g(x, y)$ 表示通过 P_1 之后光线的振幅, 则光线经透镜 L_1 后将聚焦在平面 P_2 完成第一次傅立叶变换, 称 P_2 平面为傅氏面。 P_2 处光线的振幅可表示为

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda F_1} (x f_x + y f_y) \right] dx dy \quad (4)$$

其中, λ 是平均波长, F_1 是变换透镜 L_1 的焦距, 而

$$f_x = 2x / (\lambda F_1), f_y = 2y / (\lambda F_1) \quad (5)$$

具有与频率相同的量纲, 即为空间频谱分量, 相应地将 $G(f_x, f_y)$ 称为输入图像的空间频谱。由式 (5) 可见, 傅氏面上衍射角越大 (即 x, y 值越大) 的位置对应的空间频率越高。光线经透镜 L_2 再进行一次傅立叶变换后成像在 P_3 平面上, 输出图像的振幅可表示为

$$r(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(f_x, f_y) \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda F_2} (u f_u + v f_v) \right] df_x df_y \quad (6)$$

其中 F_2 为透镜 L_2 的焦距。如果在 P_2 平面处放一块透过率为 $H(f_x, f_y)$ 的滤波片, 式 (18) 右边积分号中的振幅分布函数 $G(f_x, f_y)$ 将变为,

$$G'(f_x, f_y) = G(f_x, f_y) \cdot H(f_x, f_y) \quad (7)$$

从而输出图像 $r(u, v)$ 也将发生相应的改变, 这种通过改变空间频谱来影响输出图像的方法就称为空间滤波。只要在傅氏面上引入各种不同形式的空间滤波片, 就可实现图像信息的高通、低通、带通等滤波处理, 以改善图像的质量。

2.4 单透镜光信息处理

为更好地理解空间滤波的概念, 可采用如图3所示的简化光路。假设用一维光栅作为输入图像。设光栅狭缝沿 x 方向放置, 为了在平面 P 上呈现清晰的输出图像, 光栅位置可在透镜的焦距附近微调。平行单色光通过光栅后将产生衍射, 其中 0 级光的衍射角为零, 空间

频率为零；级别越高，衍射角越大，空间频率越高。在傅氏面处放置一宽度可调的狭缝，则可以通过单缝位置和缝宽的调节，有选择性地使某一级别的衍射光通过，从而通过 P 平面上输出条纹的宽度、清晰程度和强度半定量地研究空间滤波器对光信息处理结果的影响。

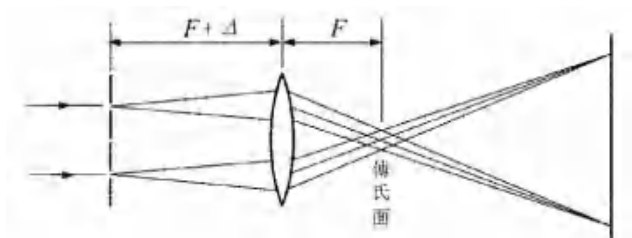


图 3: 以光栅为物时的单透镜光信息处理

若将物设置为简单的一维光栅，其空间频率为： $f_0 = 1/\delta$ 其中 δ 为光栅常数，设光栅狭缝方向为 y 方向，垂直于光栅狭缝方向为 x 方向那么在傅氏面（即后焦面）处由于凸透镜的聚焦性质 y 方向光将汇聚为一个光点，而对于 x 方向由于平行光由于狭缝的存在将发生夫琅禾费衍射，(如图 3 所示)。经过计算，傅氏面处的光场分布可以等价于对光栅处的光场分布 $g(x)$ （光场大小与电场强度幅值成正比）进行了一个傅里叶变换：

$$G(f_x) = \int g(x) e^{i2\pi x f_x} dx \quad (8)$$

因此傅氏面光场分布 $G_1(x')$ 满足：

$$G_1(x') = \int g(x) e^{i2\pi x \frac{x'}{\lambda F}} dx \quad (9)$$

由于一维光栅 $g(x)$ 是较为特殊的方波形式，其傅里叶变换可以写成如下的离散结果：

$$g(x) = \sum G_n e^{i2\pi n x f_0} \quad (10)$$

$$G_n = \begin{cases} \frac{2g_0(-1)^{n+1}}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

G_n^2 即为第 n 级条纹 ($x' = n\lambda F f_0$ 处) 的光强大小，而其余位置光强均为 0。随着条纹级数的增大 (即 x' 的增大)，光强将呈现逐级递减趋势，我们取 $g_0 = 1$ 绘制得到归一化光强与条纹级数的关系如图 4 所示

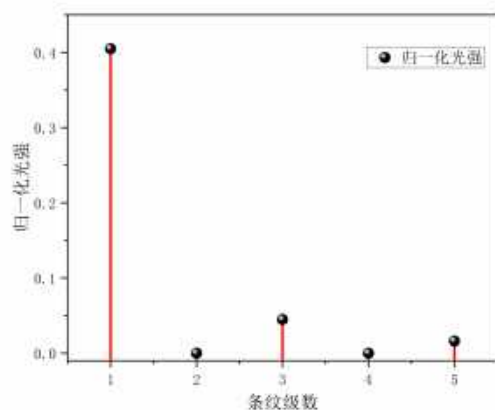


图 4: 光栅傅氏面理论图

对于后面的空间滤波，如果只通过零级一级光，则只需将前三级相干叠加，对于不滤波的情形，只需对其进行一次傅里叶变换即可，最终即呈现一个倒像。

3 基于空间光调制器的全息实验

3.1 光学全息

传统的照片仅仅包含了光波的强度或振幅信息。与之相比，全息图记录了光波的全部信息，不仅包括振幅信息，而且还包括相位信息。全息术是一种两步成像技术，分为波前记录和波前再现两个过程。在光学全息中，波前记录时需要引入一束与待记录物光波相干的光束作为参考光，记录物光波与参考光的干涉图样，常用的全息图记录光路如图 5(a) 所示。波前再现时则需要引入一束与记录参考光相同或者共轭的参考光照射在全息图上，从而再现干涉图样所记录的物光波，常用的全息图再现光路如图 5(b) 所示。

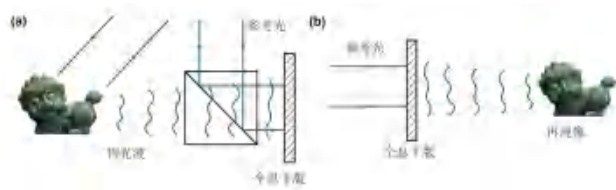


图 5: 全息术二步成像过程示意图

假设物光波的复振幅为 $O(x, y) = |O(x, y)| \exp[i\phi(x, y)]$ ，参考光的复振幅为 $R(x, y) = |R(x, y)| \exp[i\psi(x, y)]$ ，则在全息干版平

面形成的干涉图样强度为

$$I(x, y) = |O + R|^2 = |O|^2 + |R|^2 + 2|O| \cdot |R| \cos(\phi - \psi) \quad (11)$$

从上式可以看出, 尽管通常记录介质只记录了干涉图样的强度, 但其中包含了物光波的振幅 $O(x, y)$ 与相位 $\phi(x, y)$ 等全部信息。传统光学全息通常使用使用卤化银感光胶膜、光聚合物胶片、重铬酸盐明胶等作为全息图的记录介质, 经过显影、定影等后期化学手段处理后, 全息干版的振幅透射率函数可以表示为,

$$t_A(x, y) = t_b + \beta' (|O|^2 + R^*O + RO^*) \quad (12)$$

其中 t_b 为由参考光产生的偏置透射率, β' 表示振幅透射率-曝光量曲线在偏置点的斜率和曝光时间的乘积。对于正片, β' 为正数; 对于负片, β' 为负数。若使用一束与原来参考光相同的光束 R 来照射全息片, 则透射光为

$$Rt_A(x, y) = t_b R + \beta' |O|^2 R + \beta' R^* R^* O + \beta' |R|^2 O^* \quad (13)$$

上式中, 第一项为直接通过全息干版的平面波, 即零级光; 第二项通常为低频项, 其能量通常主要分布在光轴附近; 第三项正比于原物光波前 O 乘以一个线性因子; 第四项为物光波的共轭像 O^* 。同理, 若使用与原参考光共轭的光束 R^* 照明全息片, 则重现光场可以表示为,

$$R^* t_A(x, y) = t_b R^* + \beta' |O|^2 R^* + \beta' R^* R^* O + \beta' |R|^2 O^* \quad (14)$$

从上两式可以看出, 通过记录参考光与物光波的干涉图样, 能够利用参考光或其共轭来再现包含原物光波振幅和相位信息的再现光波波前。但需要注意的是, 无论用参考光或者其共轭来再现, 除了所需的物光波外, 总会同时得到直流项、共轭像等干扰场分量。

3.2 全息术的分类

3.2.1 根据技术手段不同来分类

传统光学全息

传统光学全息是指波前记录和波前再现两个过程均通过光学方法实现的全息术, 即光学记录光学再现。

其需要通过曝光、显影、定影、漂白等一系列处理过程, 将物光波和参考光的干涉图样记录在全息干版上。

在整个曝光的过程中要求干涉条纹保持不变, 对实验平台的稳定性有较高要求。同时, 还需要显影、定影、漂白等一系列复杂的化学后处理过程, 比较耗时, 难以实现实时记录。

计算全息

计算全息采用数值计算的方法来获得波前记录过程中的全息图, 并将全息图加载到空间光调制器上, 再通过参考光照明获得再现物光波, 即数值记录光学再现。

利用计算全息的技术手段, 可以设计全息光学元件, 这些元件能够替代传统的光学元件, 如透镜、分光棱镜等, 并具有便携紧凑等优点。此外, 计算全息的全息图是通过数值计算获得的, 相较于传统光学全息, 它能够记录并再现现实中不存在的物体。因此, 计算全息常常应用于三维显示、增强现实 (Augmented Reality, AR)、虚拟现实 (Virtual Reality, VR) 等领域。

数字全息

数字全息采用光学方法获取全息图样, 但使用 CCD 或 CMOS 相机来替代传统的全息干版来记录全息图。然后利用数值计算方法在计算机中再现物体, 即光学记录数值再现。

与传统光学全息相比, 数字全息具有突出的优点: 首先, 在数字全息的光学记录过程中, 采用 CCD 相机等光敏电子元件代替普通全息干版来记录干涉条纹, 大大缩短所需的曝光时间, 降低了对光学平台稳定性的要求。其次, 数字全息无需复杂的湿处理过程, 适合于实时记录运动物体的全息图。再次, 数字全息的再现过程无需复杂的光学器件, 能够通过各种方法消除像差、抑制散斑噪声, 大大提高了成像质量。最重要的是数字全息技术能够定量地获得再现像的包括振幅和相位的复振幅信息, 而在光学再现中仅能获得强度信息。

正因为数字全息技术具有以上的优点, 因此, 其常常被用于全息显微、相位提取、轮廓表征等领域。

3.2.2 根据成像条件来分类

菲涅尔全息图

当记录介质位于物体的菲涅尔衍射区域时, 所记录的全息图可以称为菲涅尔全息图。根据菲涅尔衍射

公式, 物体在全息图平面的衍射场分布可以描述为

$$O_H(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ O(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (15)$$

其中, O 为物平面复振幅, O_H 为衍射光场在全息图平面的复振幅。 k 为波矢, (x, y) 为全息图平面的坐标, (ξ, η) 为物平面的坐标, z 为物平面与全息图平面之间的距离, 并且满足近似条件

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]_{max}^2 \quad (16)$$

夫琅禾费全息图

当记录介质位于物体的夫琅禾费衍射区域时, 所记录的全息图可以称为夫琅禾费全息图。对于满足夫琅禾费近似条件的情况, 即

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2} \quad (17)$$

物光波及其衍射场分布可以由式给出

$$O_H(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} O(\xi, \eta) \exp \left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta \quad (18)$$

从18可以看出, 对于夫琅禾费全息, 物光波的复振幅与衍射场的复振幅满足傅里叶变换关系, 因此, 夫琅禾费全息图也常称为傅里叶全息图。考虑到薄透镜在光路中起到傅里叶变换的作用, 夫琅禾费全息的记录和再现光路中常常使用薄透镜来实现傅里叶变换, 从而大大缩短整个光路的尺寸。

4 实验装置

4.1 空间频谱和滤波实验

- (1) 光学平台及附件: 凸透镜 (焦距分别 50mm、70mm、150mm), 宽度可调狭缝, 可变圆孔光阑, 空间滤波器 (高通、低通、带通等), 光栅片 (一维光栅), 白屏。
- (2) 液晶空间光调制器: 分辨率 1280×768, 像素大小 26 μm×26 μm。

- (3) 光纤耦合激光器: 650nm, P>2mW, 单模光纤, 芯径 4 μm。

- (4) CCD 相机参数: 分辨率 1280×1024, 像素大小 5.2 μm×5.2 μm。

4.2 基于空间光调制器的全息实验

- (1) 光学平台及附件: 反射镜, 分光棱镜, 透镜等。
- (2) 液晶空间光调制器: 透射式: 分辨率: 1024 × 768; 像素大小: 26μm × 26μm; 反射式: 分辨率: 1024 × 768; 像素大小: 9μm × 9μm。
- (3) 光纤耦合激光器: 波长: 650nm; 功率: 2mW; 单模光纤耦合输出, 纤芯直径 4μm。准直透镜, 扩束镜。
- (4) CCD 相机: MER-310-12UC: 分辨率: 2048 × 1536; 像素大小: 3.2μm × 3.2μm。MER-630-60U3C-L: 分辨率: 3088 × 2064; 像素大小: 2.4μm × 2.4μm。
- (5) 实验测控用计算机。

5 实验内容

5.1 空间频谱和滤波实验

(1) 验证阿贝成像原理 (一)

按照图6搭建光路, 凸透镜 L_3 焦距 $f = 150mm$, 观察傅氏面图像并记录。安装可调狭缝, 将其处于傅氏面上, 调节狭缝使得零级光正好通过, 观察 P 平面的图像并记录。再增大狭缝, 使得 0 级和 1 级光通过, 逐渐增大使得所有光通过, 观察并记录成像特点及条纹间距。

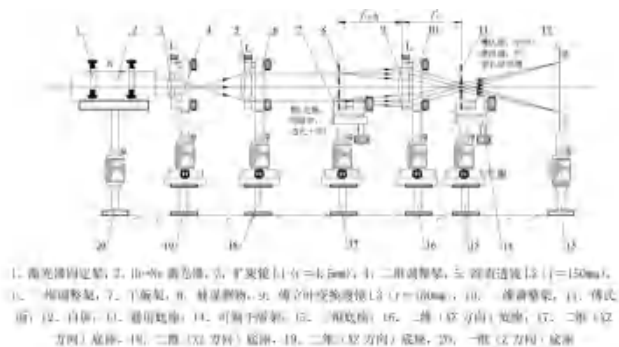


图 6: 以光栅为物时的光信息处理光路图

(2) 验证阿贝成像原理 (二)

用空间光调制器代替光栅进行上步实验，按图7搭建光路，加载“128T 一维光栅”图片至空间光调制器，观察傅氏面图像并记录，与一维光栅实物对比异同。

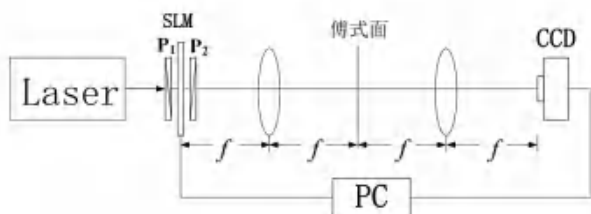


图 7: 光学信息处理系统

在傅氏面处放置刀口与竖直方向频谱平行的可调狭缝，调节狭缝大小并记录成像图，然后将狭缝换为圆孔光阑，滤掉 x 、 y 方向的频谱，观察变化。

(3) 低通滤波和高通滤波

空间光调制器的图案换成图8(a)所示的网格光图案，观察像平面，然后分别将低通滤波器与高通滤波器放于傅氏面，比较三者成像。

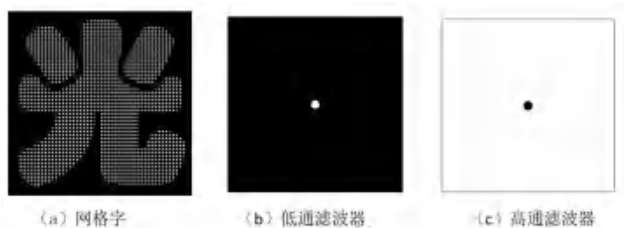


图 8: 网格图案及低高通滤波器

(4) 方向滤波

光路同内容 (2)，在空间光调制器加载“128T×96T 二维光栅”，记录傅氏面以及像面的图像；将可调狭缝置于傅氏面上，使得中间只有一列衍射光通过，分别将狭缝置于竖直、水平、45° 与 135° 倾斜，记录像面图像，得到条纹间距。

5.2 基于空间光调制器的全息实验

- (1) 调节光路，保证整个光路保持等高同轴并且保持稳定。

(2) 计算全息成像

按照傅里叶全息成像光路搭建再现光路，光路如图9所示

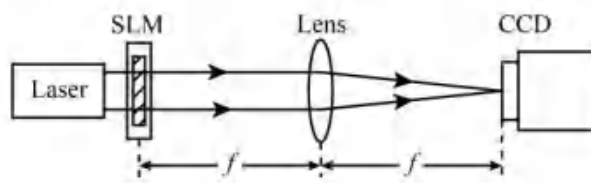


图 9: 傅里叶计算全息再现光路

将给定的全息图文件加载至空间光调制器，并用 CCD 拍摄成像效果，再用实验软件将指定图片计算为傅里叶全息图，加载到空间光调制器中，并用 CCD 拍摄。

(3) 数字全息成像

按照图10搭建数字全息成像光路

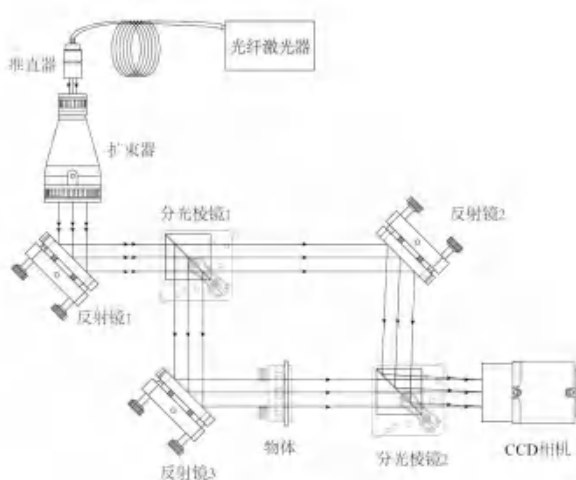


图 10: 数字全息图波前记录光路

将印有字母的透明胶片作为物体放置到干涉仪的其中一臂，记录物体到 CCD 的成像面距离，拍摄记录此时的干涉条纹，即全息图，再将软件切换为数字全息界面，将上布获取的全息图导入计算再现像，最后搭建再现光路，将全息图加载到空间光调制器中，拍摄成像效果。

6 实验结果与讨论

6.1 空间频谱和滤波实验

6.1.1 验证阿贝成像原理 (一)

搭建光路后,通过调节透镜与成像板的距离,我们发现在距离 14.4cm 时,成像最清晰,则记录傅氏面的频谱样式,如下所示



图 11: 4f 系统傅氏面

可见 y 方向光束聚集在一点,而 x 方向点向外等差排列,并且光强逐渐降低,其与我们之前的理论求解一致,即图4,可见理论的合理性。

然后将傅氏面安装可调狭缝后,在距离透镜后 42.3cm 处安装 CCD,调节光栅只透过 0 级光,可得结果



图 12: 实物光栅 0 级光成像

此时理论上讲应当不会形成干涉条纹,应当是点光源所形成的亮斑,即均匀分布,而由于狭缝较小,并且傅氏面的光点并非理想的单点,而是有一定的半径,则虽然此时狭缝令 0 级亮斑完全透过,但实际上

其还是遮挡了一部分 0 级光,且发生了一定的菲涅尔衍射,从而在 CCD 面上形成了类似圆环的衍射条纹。

再增大狭缝,使得透过 0 与 ± 1 级光,可得

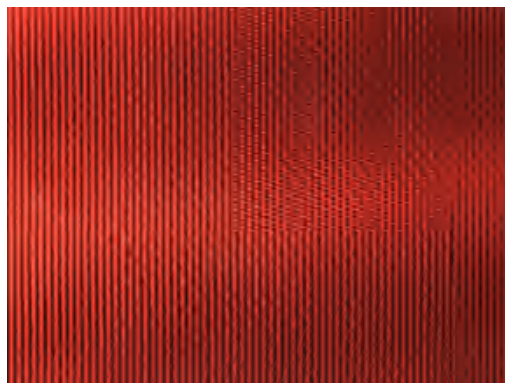


图 13: 实物光栅 0、 ± 1 级光成像

最后撤去狭缝,可得

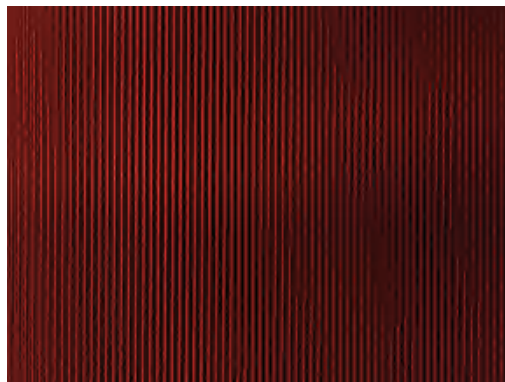


图 14: 实物光栅成像

理论分析:

对于此体系,我们在之前进行过初步分析,我们在此进行数学形式上的求解:

如果只令 0 级和 ± 1 级光点通过傅氏面并叠加到物面上,则只需要将前三级衍射斑相干叠加即可结合我们之前对傅氏面的求解,即式10,设像面的坐标用 x'' 表示,则光强分布满足:

$$G_2(x'') = G_0 + G_1 \cos 2\pi \frac{x''}{\delta} \quad (19)$$

其中 δ 为光栅常数,理论上其将在物面上形成衬比度较低的干涉条纹。

倘若让所有光点通过傅氏面,并且在距离 F' 处的像面上成像,则相当于对傅氏面光强分布再次进行傅里

叶变换, 即:

$$G_2(x'') = \int G_1(f_x) e^{2\pi i f_x \frac{x''F}{F'}} df_x \quad (20)$$

若我们进行变量替换, 令 $y = -\frac{x''F}{F'}$, 则有以下形式

$$G_2(x'') = \int G_1(x') e^{-2\pi i f_x y} df_x \quad (21)$$

此数学形式等价于对 $G_1(x')$ 进行反傅里叶变换, 可得:

$$G_2(x'') = g\left(-\frac{x''F}{F'}\right) \quad (22)$$

相当于直接对物面光强分布进行变量替换, 即形成一个大小为原始物体 F'/F 倍的倒像, 且成像应当最清晰。

经过对比图13与14即可看出, 对于所有光全部透过时, 成像亮纹与暗纹十分分明, 而对于 $0, \pm 1$ 级光透过时, 其成像的暗纹处也有一定的光强, 与理论分析一致。

6.1.2 验证阿贝成像原理 (二)

然后将一维实物光栅换为空间光调制器, 并再其上面加载棋盘图, 将 CCD 对到成像中央, 其原始图与结果图如图15所示

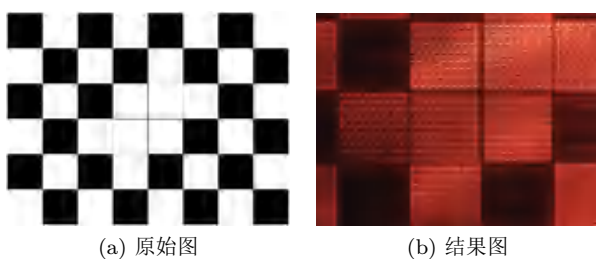


图 15: 棋盘图片

可见我们将其基本对到了中点, 从而可以更好地观察成像。

然后我们加载了一维光栅至空间光调制器, 观察其傅氏面, 结果如图16

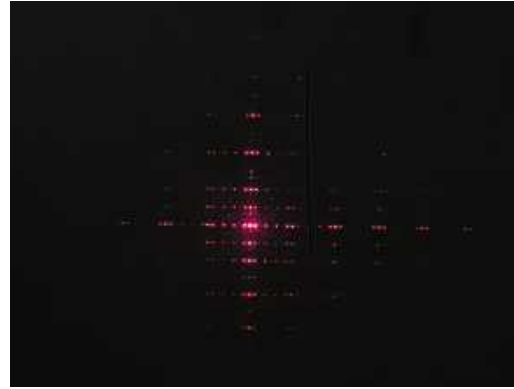


图 16: 模拟一维光栅傅氏面

可见其不仅存在着 x 方向的空间频谱, 还存在着 y 方向的空间频谱, 实际上, 这是由于空间光调制器导致的, 我们将其调制原理进行分析。

空间光调制器 (SLM) 由一个个周期性排列的独立像素单元组成, 驱动电路可以分别控制每一个像素的电压, 进而控制每个像素的光线调制特性, 从而进行光源物体的制作。其像素单元如图17所示



图 17: 像素单元

空间光调制器是由一个个的像素点进行光调制的, 由于不透光部分的遮挡会形成各种衍射, 因此它往往具有更加丰富的空间光谱特征。若我们加载一条光栅, 则其会加载一个矩形方块矩阵, 如图18所示

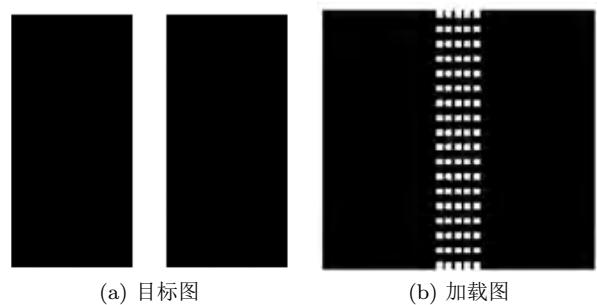
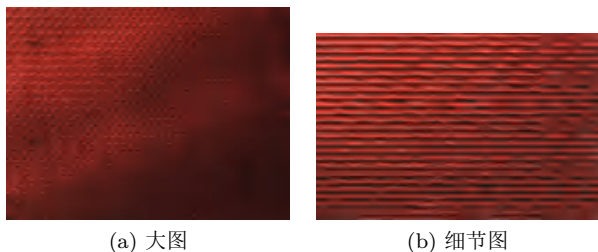


图 18: 空间光调制器成像

此时虽然其横向光栅更加明显，但实际上由于像素点产生的竖向光栅也无法忽略，故此时会在傅氏面产生 x 、 y 方向上的空间频率，即图16所示。

然后我们撤去傅氏面白板，将狭缝放入，并让其狭缝大小恰好透过 0 级光，此时只透过 y 方向上的一条竖向光斑，结果如图19所示



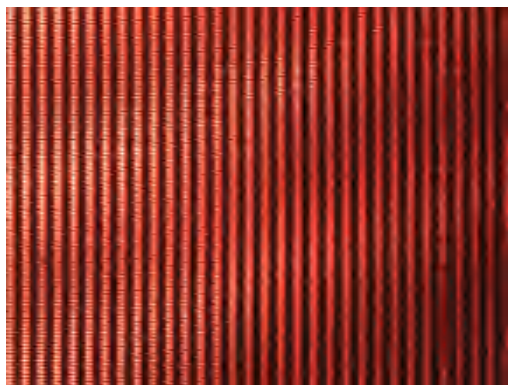
(a) 大图

(b) 细节图

图 19: 模拟一维光栅 0 级光成像

其中 (a) 图为大图，我们仔细观察可以看出其产生了干涉圆环以及横向的干涉条纹，(b) 为细节图，我们将成像放大后可以发现其呈现较为明显的横向干涉条纹，此即我们之前分析的 y 方向上的空间频谱所产生的干涉图样，效果十分明显，与理论一致。而大图中的圆环干涉条纹与图12所形成的干涉圆环基本一致，我们推测其可能也是由于一定的菲涅尔衍射导致的。

然后我们增大狭缝宽度，使得 0、 ± 1 级光透过，其结果如图20所示

图 20: 模拟一维光栅 0、 ± 1 级光成像

可见其呈现较为明显的干涉条纹，即加载的一维光栅所形成的条纹，而我们再将其放大，从而展示其细节，如图21 所示

图 21: 模拟一维光栅 0、 ± 1 级光成像细节

可见，此时其仍然存在着横向的干涉条纹，只是由于竖向条纹是由于加载图像产生的，则理论上其狭缝应较小，即其产生较细的干涉条纹，正如实验所体现的，其是两个方向干涉的叠加，效果十分明显。

然后将狭缝替换为可调节圆孔，首先只让中心圆斑通过，其成像效果如下

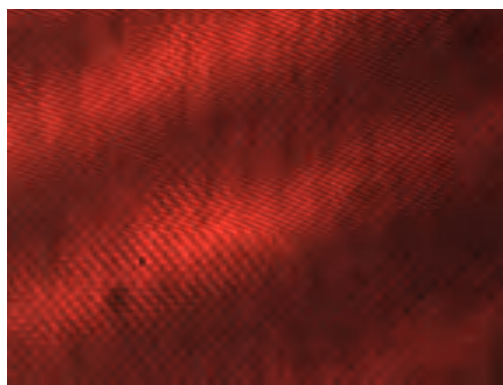


图 22: 模拟一维光栅 0 级光点成像

可见，此时其成像与图12基本一致，即此时并无明显的光栅干涉条纹，而是有可能是透镜等物体产生的菲涅尔衍射图像。

我们加大圆孔，使得大部分光都透过，此时成像如图23所示

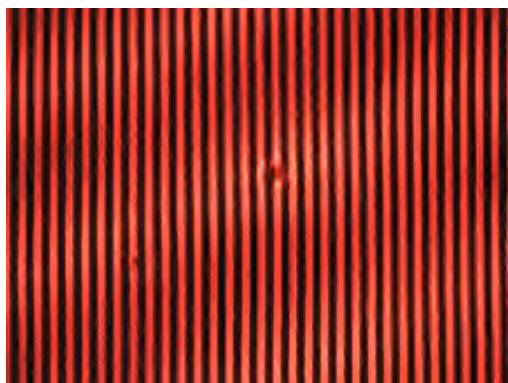


图 23: 模拟一维光栅大圆孔成像

此时其即是由几乎全部的空间频谱所成的像，其干涉条纹比图20还要明显，由于其此时已经包含几乎所有的空间频率，所以其成像十分清晰，由于空间光调制器产生的横向干涉条纹已经被十分明显的竖向干涉所覆盖，实验效果较好。

6.1.3 低通滤波和高通滤波

然后将光字加载至空间光调制器，并对其进行空间滤波，其字形与滤波器如图8所示，首先我们不进行滤波，其成像结果如图24所示



图 24: 光字无滤波成像

可见此时其呈现较明显的清晰倒像，即对图像进行两次傅里叶变换的结果，然后将低通滤波器放置于傅氏面，滤掉高频成分，此时结果如图25所示



图 25: 光字低通成像

理论上，此时由于其不包含高频的频谱信息，故应当不包含网格成像，但由于我们实验中使用的低通滤波器圆孔过大，此时仍然包含了一部分的高频成分，从而在 CCD 上依旧呈现出了一定的网格，或者我们 CCD 曝光时间较短，并未捕捉较好的图像也可能造成这种结果。但此时的网格并不明显，其仍然能够达到低通滤波的效果。

接下来我们放入了两种高通滤波器，其中心黑斑的大小不一样，我们给出其两者的成像



图 26: 光字高通成像 (小点)

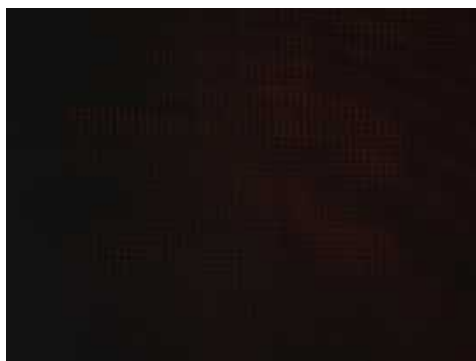


图 27: 光字高通成像 (大点)

可见此时光字的网格十分明显，因为高频信号包含的细节更加丰富。对于大点的高通滤波，由于高频光的强度降低，其 CCD 成像的光强降低，但此时可以看出，虽然光字已经不明显，但其所呈现的网格仍然十分清晰，正验证了高通滤波器的高通保留的效果。

6.1.4 方向滤波

接下来我们加载二维正交光栅到空间光调制器，其傅氏面图像为

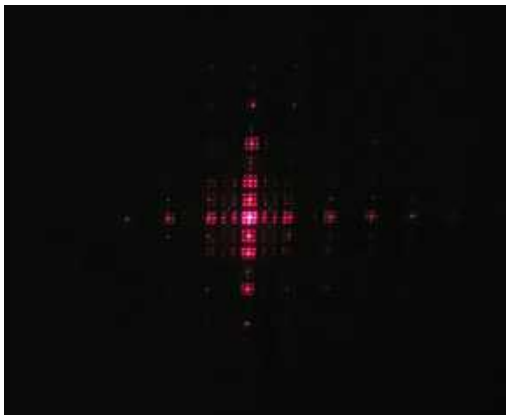


图 28: 模拟二维光栅傅氏面

可见，其此时即为两个垂直的一维光栅的空间频谱叠加，即二维正交光栅的空间频谱。

然后将可调狭缝置于傅氏面，分别将狭缝旋转于竖直、水平、45° 以及 135°，其成像效果图如图29所示

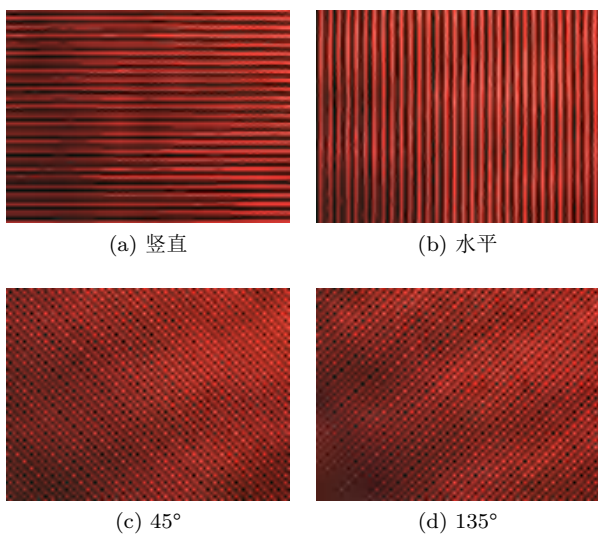


图 29: 模拟二维光栅成像图

并且我们将图片放于等大，利用 PS 读取其条纹间距的像素点个数，结果如表1

表 1: 空间滤波条纹间距

组别	像素点数
竖直	65
水平	66
45°	46
135°	47

并且我们计算其比值可以发现

$$L_{0^\circ} \approx L_{90^\circ} \approx \sqrt{2}L_{45^\circ} \approx \sqrt{2}L_{135^\circ} \quad (23)$$

即此时横向和竖向的条纹间距是斜向的 $\sqrt{2}$ 倍，我们利用理论进行分析。

对于二维正交光栅，其频谱为

$$G(x, y) = \iint g(x, y) e^{i\pi f_0(x+y)} dx dy \quad (24)$$

其应为一个二维点阵。若利用可调狭缝进行空间滤波并且选定特定方向，设狭缝的轴线坐标记作 r ，则空间滤波后的光强分布为：

$$G'(r) = \int g(r) e^{i2\pi r} dr \quad (25)$$

对于我们选定不同的滤波角度， r 与 x, y 的关系并不相同，其关系如下：

$$\begin{cases} r = x, \theta = 0^\circ \\ r = y, \theta = 90^\circ \\ r = \sqrt{2}x = \sqrt{2}y, \theta = 45^\circ \text{ or } 135^\circ \end{cases} \quad (26)$$

而我们要得到光强分布，应当对其再进行一次傅里叶变换，但此时变换的基准相差 $\sqrt{2}$ ，即斜向的 r 乘了一个系数，而我们类比坐标变换，坐标乘以一个系数相当于将其收缩，即其相当于把条纹间距收缩 $1/\sqrt{2}$ ，即此时斜向条纹比垂直条纹间距小，且约为其 $1/\sqrt{2}$ 倍。可见理论与实验基本一致，实验效果明显。

实际上其也可以用一个简单的理论进行分析，我们观察其方向滤波在傅氏面上的效果，其如下图所示

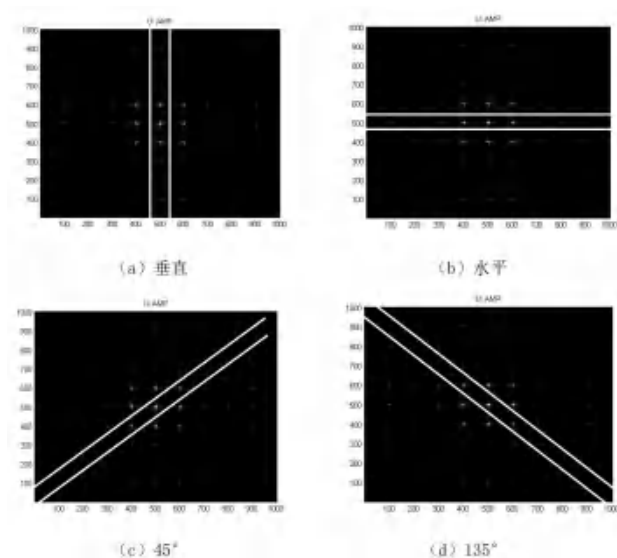


图 30: 狭缝滤波器

我们观察其傅氏面，可以看出，狭缝倾斜光点的条纹间距是狭缝水平或竖直时的 $\sqrt{2}$ 倍，且我们知道，傅氏面光点的距离与光栅空间频率 f_0 的关系满足：

$$\Delta x = \lambda F f_0 \quad (27)$$

而由于 $f_0 = 1/\delta$ ，故光点距离和光栅常数成反比，故对于倾斜的狭缝方向，其光栅常数是水平或竖直狭缝的 $1/\sqrt{2}$ 倍，则其成像也为此倍数。

6.2 基于空间光调制器的全息实验

首先，对于此实验，我们在实验中利用 CCD 观察成像时，发现 CCD 成像会产生亮暗纹，其如图31所示

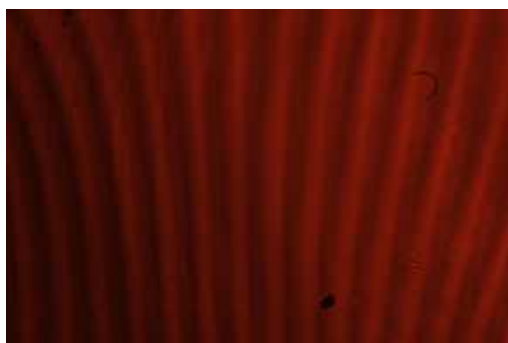


图 31: CCD 拍摄激光光源

这个亮暗纹在后期进行数字全息时一直存在，故我们最后对亮暗纹的产生进行了探究，发现在激光光

源产生时就已经出现了亮暗纹，并且在计算全息部分并未出现，而计算全息可能是由于光场重新分布从而将这种较粗的亮暗纹消除了。

我们推测可能是由于激光光源内部产生了一定的衍射现象，但由于内部结构我们无法进行操作，且亮暗纹对总体成像以及实验效果影响较小，故我们将其作为一个无关影响进行实验。

6.2.1 计算全息成像

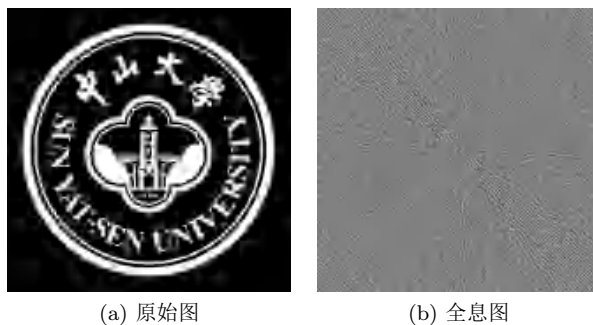
计算全息的过程是数值记录光学再现，即数值求解出全息图，再用透镜对其进行光学再现，首先我们加载给定全息图，利用 CCD 拍摄可得其再现图如图32所示



图 32: 给定全息图成像

可见，其产生了较好地全息图再现，并且全息图所包含的相位差使得其在斜方向上形成了图像，十分清晰。

然后我们利用软件 HolographicOpticsToolbox 加载校徽图案，利用软件计算其全息图，两者如下



(a) 原始图

(b) 全息图

图 33: 计算全息图片

将其加载后利用光学再现光路我们可以拍摄到再现图如图34所示



图 34: 计算全息再现拍摄图

可见其能够看清校徽以及字体的大致轮廓, 效果十分清晰明了。并且我们将其与软件给出的理论图片进行对比, 并且我们同时利用了数字全息软件对计算全息所得到的全息图进行了数值再现, 即全部用数值求解的方法对其进行记录以及再现, 结果如图35

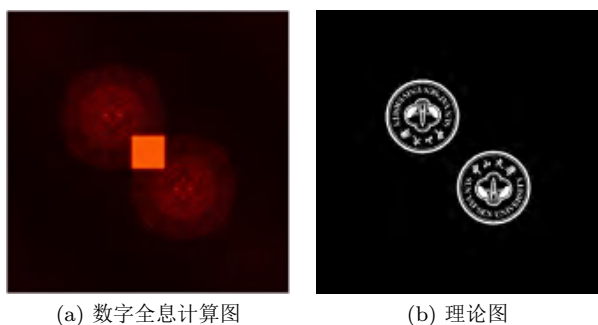


图 35: 计算全息再现理论图片

可见, 我们对软件给出的计算全息图直接进行软件数值计算, 其数值结果也并非十分清晰, 而软件计算所得的全息图由于是由像素点构成的, 其不可避免地会产生失真, 而空间光调制器也是有一定分辨率的, 并且实际实验中存在着外界振动的影响, 以及不可避免地有一定的杂光摄入和光的发散效果, 而我们在分辨率有限以及真实实验中存在一定外界影响的情况下, 实现了较好地光学再现过程, 实验较为成功。

成像特点:

我们可以发现, 全息成像是关于中心对称的, 实际上是由于全息成像的特点导致的。对于其全息图的形成, 实际上是两束光 (物光 U_1 、参考光 U_2) 干涉形成的, 全息图的光强分布应为

$$I(x, y) = |U_1(x, y) + U_2(x, y)|^2 \quad (28)$$

其中 U_1 与 U_2 分别代表物光和参考光的振幅和相位分布, 此时光强分布即为全息图。

然后我们看再现过程此时我们再用参考光 U_2 入射全息图, 即可得到光场分布

$$U(x, y) = U_2(x, y) \cdot I(x, y) \quad (29)$$

其中有两个主要项, 分别为:

a. $U_1(x, y) \cdot U_2^*(x, y)$ 为物光和参考光的共轭的关系, 最终形成实像。

b. $U_1^*(x, y) \cdot U_2(x, y)$ 为物光的共轭和参考光的关系, 最终形成与实像中心对称的虚像。

即中心对称的像实际上是由于物光和参考光共轭产生的, 具体的数学形式即利用傅里叶变换, 在此不再赘述。

6.2.2 数字全息成像

对于数字全息, 其是光学记录数值再现, 即光学拍摄全息图, 数值再现其结果。

我们按照图10 搭建光路后, 将 SYSU 的字母放入一条光路, 记录此时 CCD 拍摄的干涉图像, 并且将其导入软件的数字全息中进行数值再现, 我们通过调节光路的相位差, 实现了四组数字全息成像过程, 结果如图36所示

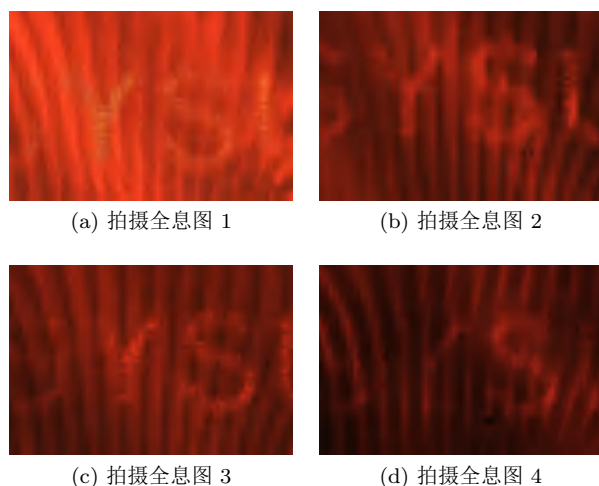


图 36: 数字全息拍摄全息图

我们在图其数值再现结果如图37所示

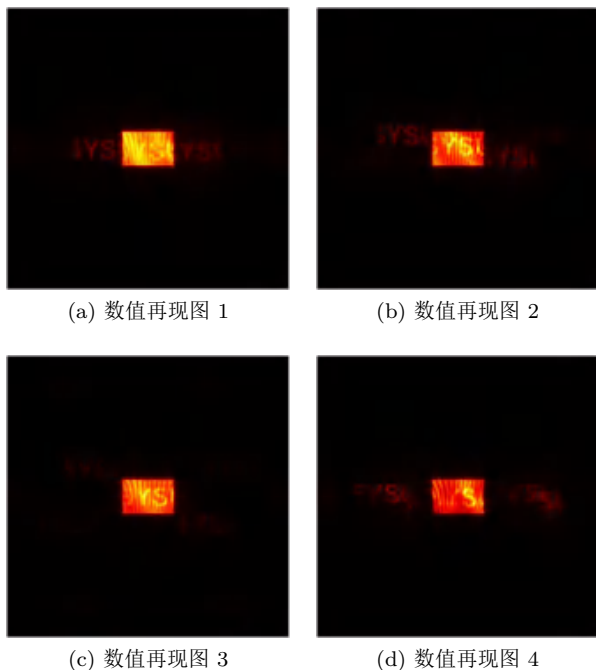


图 37: 数字全息数值再现图

可见, 四组全息图实现了左右侧、左上右下等的全息结果图的实现, 其成像效果较为清晰。

并且我们搭建了真实的复现光路, 即传统全息成像, 光学记录、光学再现, 第 1、2 组成像效果如图 38 所示

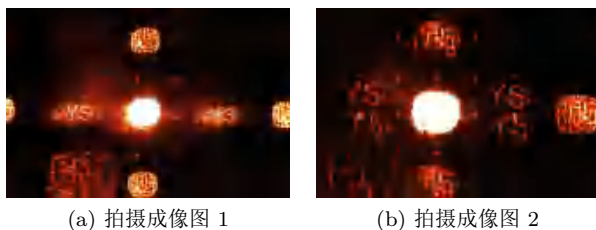


图 38: 传统光学全息拍摄成像图

可见, 其分别在左右侧以及四个对角处形成了全息图样, 其结果与数值再现基本类似, 成像也十分明显。

结果分析:

对于第一组图片, 其只出现了左右侧的干涉图样, 此时全息图成像时物光与参考光只有水平方向的相位差, 而竖直方向是等相位的, 此时光路应当是始终水平的。然后我们调节了分光棱镜以及反光镜的倾斜角度, 通过不断调节, 实现了第 2 组的略微对角以及第 3 组的对角处实现, 此时物光与参考光不只是水平方向上

存在相位差, 而是竖直方向上也存在相位差, 从而形成了对角处的全息图, 数值再现以及光学再现均较好地展示了结果。

但我们在光学再现中发现第 3、4 组成像并非十分清晰, 经过对比我们拍摄的全息图, 我们猜测可能是由于全息图亮度较低导致的, 因为第 1 组的全息图亮度较高, 此时复现图十分清晰, 而第 2 组清晰度略微下降, 3、4 组已经几乎观察不到, 但数值再现中 3、4 组仍然能够实现较好的复现图显示, 实验效果较好。

7 结论

首先, 我们进行了空间频谱和滤波实验。

(1) 首先利用实物光栅, 搭建 $4f$ 光路观察了其傅氏面的空间频率, 并且理论验证了其光强随着级数增大而减小的规律, 我们通过放置狭缝, 使得 0 级、0 与 ± 1 级、全部光透过, 通过傅里叶变换的理论进行了解释, 实验与理论一致;

(2) 然后将实物光栅换为了空间光调制器, 并且在其中加载一维光栅, 观察并分析了其傅氏面频谱与实物光栅的区别, 即 SLM 的像素点导致的, 并且对其进行同样的狭缝操作, 分析了其成像结果, 即一个两方向光栅常数不等的二维正交光栅, 并且进行了圆孔滤波, 通过调节圆孔大小同样分析了其所形成的结果与孔的滤波效果的关系, 实验结果十分明显;

(3) 接下来我们在空间光调制器中加载了光字, 并且使用高通与低通滤波器对其在傅氏面进行了滤波, 通过图片可以明显地观察其光字网格的显示, 在高通下网格依旧十分明显, 而在低通下虽然光强较大, 但网格并非十分清晰, 因为我们对高频成分进行了滤除;

(4) 最后我们进行了方向滤波, 通过加载二维光栅, 呈现了两个方向上空间频谱的叠加, 然后我们利用狭缝对其进行了多角度滤波, 读取并计算了其所产生的干涉条纹间距比值, 并且分析了其成像原理, 实验效果十分明显, 实验较为成功。

接下来, 我们进行了基于空间光调制器的全息实验, 其分为计算全息和数字全息两个部分。

(1) 我们首先进行了计算全息部分, 通过将给定的图片以及软件求解得到的全息图加载到空间光调制器中, 利用 CCD 拍摄所成的全息图, 其成像效果明显, 并且我们将其与软件求解和理论图片进行了对比, 分析了其成像原理以及为何会呈现中心对称的图像;

(2) 最后进行了数字全息成像, 搭建记录光路, 通过马赫曾德干涉仪实现物光与参考光的干涉, 进而得到全息图, 然后通过数字全息软件计算其再现结果, 分别实现了左右侧以及对角线的复现图等, 即调节物光与参考光形成 xy 两方向的相位差, 图像较为清晰。并且我们也进行了光学再现过程, 即利用数字全息中所得到的全息图加计算全息部分的再现光路, 从而实现了传统光学全息的过程, 如图38, 其结果也十分明显, 并且与数字全息的计算结果基本一致。

综上, 本次实验中各部分理论与实验的符合效果皆十分可观, 实验较为成功。

参考文献

- [1] 文亮. 分数傅里叶变换及其应用 [D]. 重庆大学, 2008.
- [2] 周峰, 叶然, 李光伟, 张海涛, 王东生. 大视场波前编码成像系统中的图像复原 [J]. 光学学报, 2010, 30(02): 388-393.
- [3] 王永瑛, 王玉荣, 杨永斌. 用迭代傅里叶变换算法实现光学分级图像加密 [J]. 中国激光, 2006(10): 1360-1364.
- [4] 陈方林, 曹怡青, 王雨田, 唐霞辉, 唐明, 付松年, 赵鹭明. 非线性傅里叶变换及其在光通信和超短脉冲表征领域的应用 [J]. 中国激光, 2022, 49(12): 238-257.
- [5] 司召鹏, 毛邦宁, 卜泽华, 龚华平, 徐贲, 康娟, 杨春君, 赵春柳. 基于快速傅里叶变换的分布式振动传感信号解调分析 [J]. 中国激光, 2023, 50(05): 108-114.
- [6] 许传龙, 汤光华, 杨道业, 周宾, 潘琦, 邵理堂, 王式民. 静电感应空间滤波法测量固体颗粒速度 [J]. 中国电机工程学报, 2007(26): 84-89.
- [7] 陈怀新, 隋展, 陈祯培, 安波, 李明中. 采用液晶空间光调制器进行激光光束的空间整形 [J]. 光学学报, 2001(09): 1107-1111.
- [8] D. L. Andrews, "Structured Light and Its Applications: An Introduction To Phase-Structured Beams And Nanoscale Optical Forces", Elsevier, 2008.
- [9] 王华英. 数字全息显微成像的理论和实验研究 [D]. 北京工业大学, 2008.
- [10] 朱吉男. 基于计算鬼成像的图像加密方法的研究 [D]. 山东大学, 2019.
- [11] 王继坤. 数字激光全息技术的应用与发展 [J]. 中国品牌与防伪, 2007(06): 65-67.
- [12] 王云新, 王大勇, 杨怡姝, 赵洁, 欧阳丽婷, 肖向茜, 戎路. 数字全息技术在生物医学成像和分析中的应用 [J]. 中国激光, 2014, 41(02): 19-31.

Experiments GX1 GX2

Fourier Optics and Optical Holography Experiments

Shangrun Lu¹

¹ School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Optics is an important branch of physics with a rich subject matter and a wide range of applications; spatial filtering is an important application area of Fourier optics, a technique for manipulating the distribution of spatial light fields to achieve effects such as image processing; holographic imaging is a major direction of modern optical research, which opens up many new areas of optical research and enables three-dimensional imaging problems that cannot be achieved with conventional light. In this paper, we first carried out spatial filtering experiments, using a physical grating, a one-dimensional grating loaded in a spatial light modulator to observe the Fourier surface, and a single directional filter using a slit; then observed the high pass and low pass filtering of the word "light" to verify the imaging details presented in the high frequency information part; afterwards, by loading a two-dimensional Next, we carried out holography experiments, starting with the computational holography part, where we used software to calculate the holograms and build a reproduction optical path to achieve a good reproduction. The numerical reproduction was good, and we finally used the reproduction light path to reproduce our recorded holograms again, i.e. to achieve two sets of conventional holographic processes. The experiment was very successful.

Key words: Fourier optics, Spatial filtering, MATLAB numerical solution, Computational holography, Digital holography

A 附录

A.1 原始数据

原始数据已记录于教师签名页以及上传至 seelight 中。

A.2 思考题

1. 运用阿贝成像原理, 说明实物一维光栅与空间光调制器输入的一维光栅的频谱差异原因, 综合解释“验证阿贝成像原理(一)”和“验证阿贝成像原理(二)”所看到的现象。

实际上, 我们已经在实验原理以及实验内容具体部分进行阐述过了, 具体见图17部分, 在此我们综合解释两者差异及其原因。

对于实物光栅, 我们看到其傅氏面是一条直线, 即其产生的空间频谱只有一个方向, 正好对应一维光栅产生的傅氏面频谱, 而对于加载的光栅, 我们看到其在 x 、 y 方向上都产生了亮斑分布, 即此时存在两个方向的空间频谱, 其对应二维光栅产生的傅氏面频谱。

实际上, 由于空间光调制器类似于一块屏幕, 其存在一定的分辨率, 此时我们加载一维光栅, 但实际上由于像素点存在间隔, 此时的空间光调制器起到了二维光栅的作用, 其即会在两个方向上产生空间频谱。

我们再看其成像结果, 一维实物光栅的 0 级光并不存在明显的光栅干涉条纹, 而空间光调制器加载的一维光栅在 0 级光即产生了明显的横向干涉条纹, 此即因为像素点间距导致的 y 方向空间频谱的干涉条纹; 而在 0、 ± 1 级光透过时, 我们可以看到实物光栅出现了明显的竖向条纹, 而空间光调制器加载的一维光栅出现了较为明显的竖向条纹, 但我们仔细观察可以看出其也存在着横向的干涉条纹, 即由于分辨率产生的干涉条纹。

2. 如何从阿贝成像原理来理解显微镜(或望远镜)的分辨本领? 为什么说一定孔径的显微镜只能具有有限的分辨本领, 不能用增大放大倍数的办法来无限制提高其分辨样品细节的能力?

阿贝成像原理是光学成像系统(如显微镜和望远镜等)的一个基本原理, 其表明了光学系统所需要捕获的空间频率以达到较高分辨率成像。

当光照射在物体上时, 物体表面的细节结构对光发生衍射作用, 衍射光波包含了物体的空间频率信息。

我们知道, 越高的空间频率代表着越小的结构细节。阿贝原理表明, 为了观察或得到物体的更小的结构细节, 光学系统需要捕获的空间频率范围应该更大, 即需要捕获由物体产生的丰富的空间频率信息才能得到更好地成像结果。可以说, 分辨本领即一个光学元件捕捉空间频率信息的能力, 如果其捕捉到的高频信息越多, 其分辨本领越高。

对于一个物体, 其表面存在着无数的精细结构, 当我们到达显微镜(望远镜)的分辨尺度时, 其衍射现象已经十分明显, 我们无法忽视, 其空间频谱也对应着从低频到高频的信息, 而我们的孔径即相当于一个低通滤波器, 此时其会滤掉高频信息, 从而我们再从其低频信息复现到原始图像时, 会产生信息的丢失, 从而图像细节变地模糊; 而对于一个固定孔径, 其能够捕捉到的空间频率是有限的, 倘如我们不断增大放大倍数而不增大孔径, 其会导致最终丢失大部分的高频信息, 从而使得成像已经无法分辨, 而孔径也无法调节至无穷大, 所以对于一个有限大的孔径, 其一定会滤掉一部分的高频信息, 从而无法使得过于细微的图像再现。

3. 分析影响计算全息成像效果的因素。

①光源:

首先, 对于光源的类型(例如激光、白光等), 波长和相位分布等都会影响全息成像的质量。一般我们将激光作为相干光源, 其在全息成像中具有较好的成像质量, 但激光也有一定的波长宽度, 较差的单色性会影响计算全息的成像。

②光学系统:

对于计算全息的再现光路, 其对成像效果影响较大, 对于光路的准直性以及成像位置摆放等等会捕捉不同位置的再现图, 其光路布局影响较大。

③分辨率:

由于实验中, 我们使用的是空间光调制器加载全息图, 并且捕捉图片使用的是 CCD 相机, 二者都是电子屏幕, 其都存在着分辨率, 而分辨率对全息图的再现过程中细节的复现有着较大的影响, 其分辨率的限度会导致我们无法得到颗粒分明的再现图。

④噪声误差:

对于实验光路, 其无可避免地会捕捉到杂光, 并且由于外界的振动等, 会导致光路的不稳定, 所形成的光场会随着振动等产生较大的波动, 即会导致成像发生改变。

4. 尝试编写计算全息及数字全息的代码。

我们利用 MATLAB 实现了计算全息以及数字全息，其代码如下：

计算全息代码：

```
1 P0=imread('550W.bmp');%读取图像
2 P0=imresize(P0,[1080,1920]);%将图像调整到1080×1920像素
3 P0=double(P0(:,:,1));
4 [r,c]=size(P0);%得到图片分辨率
5 ef=0.5;%设置纯相位随机噪声系数
6 FP0=fftshift(fft2(P0.*exp(1j.*rands(r,c).*pi.*ef))));%计算傅里叶变换
7 phi=angle(FP0);%计算相位分布
8 H=mod(phi,2*pi);%计算相位取模数2的余数
9 H1=round(H/max(H(:))*255);%绘制全息图
10 CGH=exp(1j.*H1/40.58);%漂白制作成纯相位全息图(理想情况下相位还原到0~2pi, 40.58=255/2pi)
11 rP=ifft2(CGh);%进行逆傅里叶变换得到再现光场
12 figure;imshow(H1,[]);%显示数值计算得到全息图
13 figure;imshow(rP.*conj(rP),[0,0.00001]);%显示再现图
```

原始图：



(a) 图片 1

(b) 图片 2

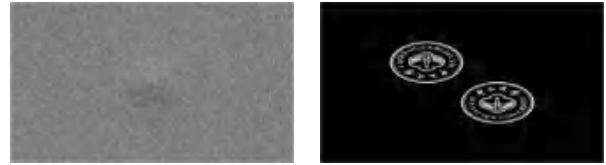
图 1: 计算全息原始图

结果图：



(a) 图片 1 全息图

(b) 图片 1 还原图



(c) 图片 2 全息图

(d) 图片 2 还原图

图 2: 计算全息 MATLAB 数值求解结果

数字全息代码：

```
1 lamda=532*10^(-6);%光波长
2 P=8*10^(-3);
3 num=800;
4 P1=double(imread("21305127_Holo_1404_OriginalImage.bmp"));%读取图片
5 [X,Y]=size(P1);%得到图片的分辨率
6 a=[-Y/2:1:(Y-1)/2];%定义行列
7 b=[-X/2:1:(X-1)/2];%定义行列
8 A=a*P;%等比缩小
9 B=b*P;%等比缩小
10 [XX,YY]=meshgrid(A,B);%生成采样点
11 E=lamda*num/(Y*P);
12 phi=exp(i*pi/(lamda*num)*(XX.^2+YY.^2));%给出相位
13 P2=fftshift(ifft2(P1.*phi));%进行变换
14 P3=abs(P2);%得到幅度
15 colormap(gray(256))%设置图片颜色
16 imagesc(a*E,b*E,P3)%作图
17 set(gca,'YDir','normal')%Y坐标不作变换
18 set(gca,'XDir','reverse')%将X坐标反向以看到正立数字
19 title(strcat('数字全息'))%给出title
```

计算全息 MATLAB 数值求解结果：

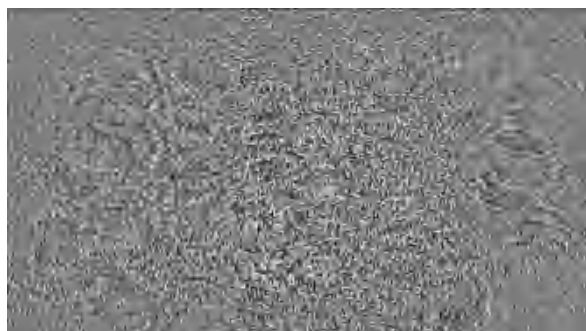


图 3: 数字全息全息图

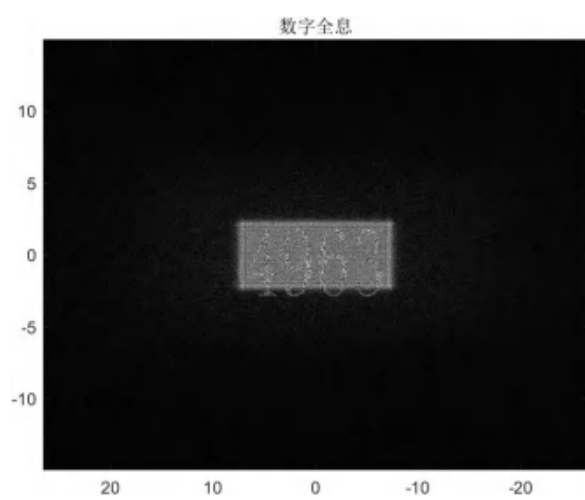


图 4: 数字全息结果图

A.3 教师签名页

实验 C7.2 空间频率带源体实验

陈

实验人: 陆南川 学号: 21305127

实验日期: 2023年5月12日 实验地点: 陆南堂

[实验目的]

通过光学平台上的自行搭建实验, 并用空间频率带源体作光源, 研究空间滤波, 物理滤波, 了解傅里叶光学基本原理的物理意义, 学习关于信息处理的物理概念和知识

[实验原理]

1. 傅里叶变换在光学成像系统中的应用

在光学信息处理中, 常用傅里叶变换来描述成像过程。设一个 XY 平面上的光场的振幅为 $g(x, y)$, 可将其按空间分布展开为一系列基函数 $\exp[i2\pi(xf_x + yf_y)]$ 的线性叠加, 即

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(f_x, f_y) \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y$$

其中 f_x 和 f_y 分别为 x 和 y 方向的空间频率, 量纲为 L^{-1} , $A(f_x, f_y)$ 和 $g(x, y)$ 互相经傅里叶变换

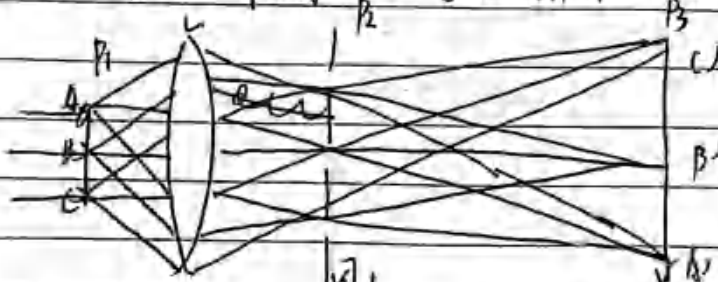
$$A(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp(-i2\pi(xf_x + yf_y)) dx dy$$

$A(f_x, f_y)$ 和 $g(x, y)$ 实际上是同一光场的两种等效描述, 若 $g(x, y)$ 是一个空间周期性函数时, 则 $A(f_x, f_y)$ 是不连续的, 式(1)和式(2)需写成级数展开的形式, 例如空间频率为 f_0 的一维光场振幅分布展开为:

$$g(x) = \sum_n A_n \exp[i2\pi x f_0 n] \quad \text{相应的空间频率为 } f = 0, \pm n f_0$$

2. 阿贝成像理论

将观测物体看成是不同空间频率信息的集合, 则成像过程就是从光源发出, 经不同



第一步是入射光场经过物面, 产生衍射光, 在傅里叶面 P_2 上形成空间频率谱, 是衍射所引起的光谱作用, 第二步是不同空间频率的光

作为新的光源发生干涉, 在像面 P_3 上互相叠加形成物体的像。

成像的过程即为两次傅里叶变换, 首先将物面光场的空间分布 $g(x, y)$ 变为频谱面 (P_2) 上的分布 $A(f_x, f_y)$, 第二步再进行一次逆变换, 将 $A(f_x, f_y)$ 还原到空间分布 $g(x, y)$ 。

3. 信息处理基本光路 (4f 系统)

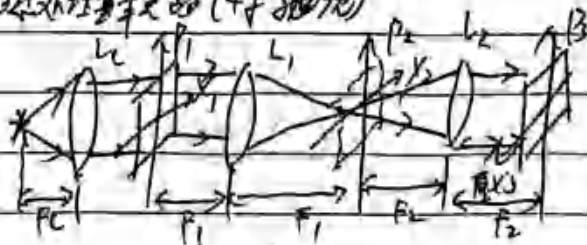


图2

实验 C7.3 基于空间光调制器的全息成像
 实验人: 匡名南 学号: 21305121
 实验时间: 2023年5月26日 下午 实验地点: 物理实验室

[实验目的]

通过搭建基于空间光调制器(SLM)的全息成像实验系统, 实现计算全息图的全息再现, 及全息图的全息记录和再现, 掌握全息图的基本原理, 了解空间光调制器(SLM)的优点, 学习全息图的基本物理原理和实验知识。

[实验原理]

从19世纪尼普斯、达盖尔(Nicéphore Niépce)提出银版摄影, 全息术已经有百年的发展历史。传统的全息图记录的是光波的振幅或相位信息, 与之相比, 全息图记录了光波的全部信息, 不仅包括振幅信息, 而且还包括相位信息。全息术是干涉和衍射的结合, 记录时利用干涉原理记录光波, 再现时利用衍射原理再现光波。记录时引入一束与待记录物光相干的参考光, 记录物光与参考光干涉形成干涉图样, 再现时引入一束与记录时参考光相同或共轭的参考光照射全息图, 从而再现干涉图样所记录的光波。

假设物光波的复振幅为 $O(x,y) = |O(x,y)| \exp[i\phi(x,y)]$, 参考光的复振幅为 $R(x,y) = |R(x,y)| \exp[i\psi(x,y)]$, 则在全息干版平面上的干涉图样强度为

$$I(x,y) = |O+R|^2 = |O|^2 + |R|^2 + 2|O||R|\cos(\phi-\psi)$$

其中 $|O|^2$ 为物光波的强度 $I_O(x,y)$, $|R|^2$ 为参考光的强度 $I_R(x,y)$, $\cos(\phi-\psi)$ 为干涉项。

在记录全息图时, 使用银版感光材料, 记录干涉图样, 全息图的记录所产生干涉图样, 经显影、定影等后期化学处理系统后, 全息干版的振幅透射率系数表示为

$$t_R(x,y) = t_0 + p(I_O + I_R + 2|O||R|\cos(\phi-\psi))$$

其中 t_0 为全息干版的背景透射率, p 为振幅透射率系数, 表示单位光强变化引起的透射率变化。对于正片, p 为正值; 对于负片, p 为负值。若用一束与记录时参考光共轭的参考光照射, 则透射光为

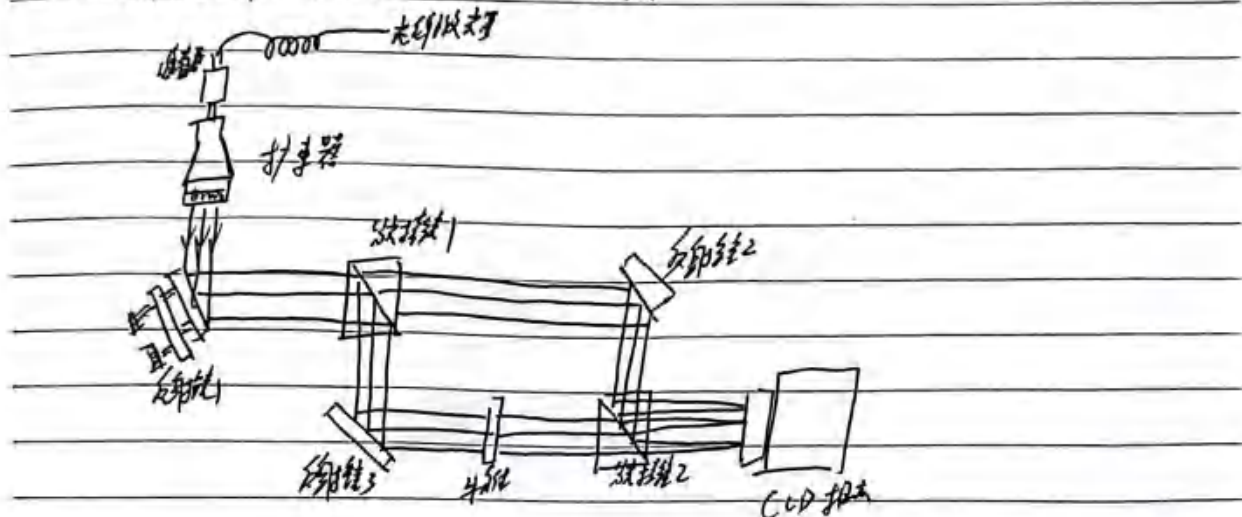
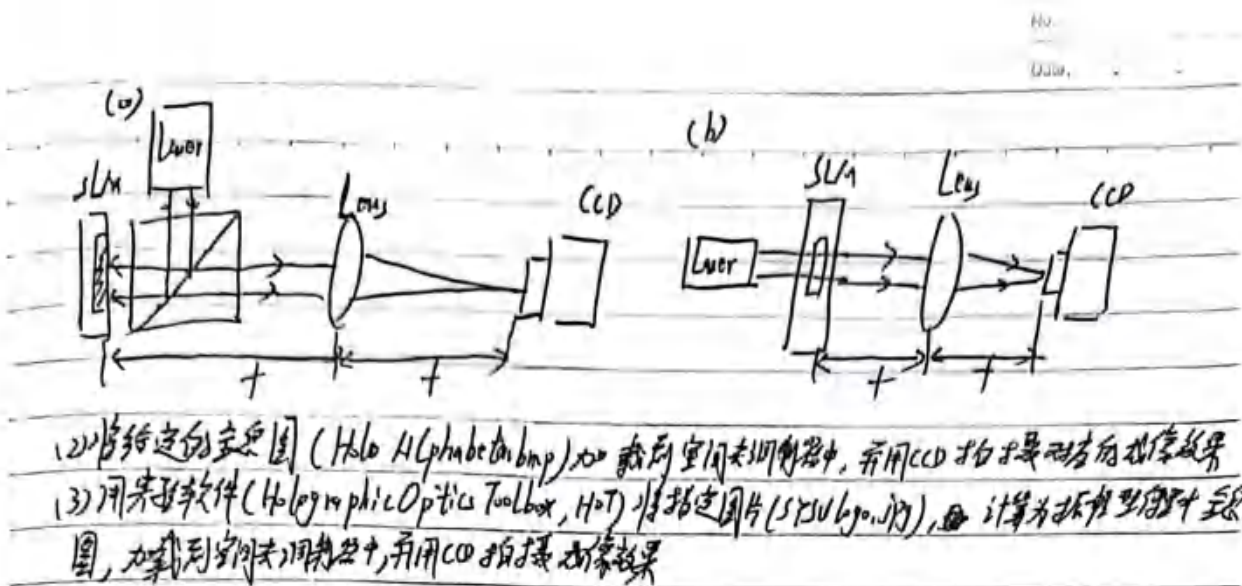
$$R_t(x,y) = t_0 R + p(I_O R + I_R R + 2|O||R|^2 \cos(\phi-\psi))$$

第一项为背景光, 第二项为衍射光, 其能量主要集中在背景光项, 第三项为衍射光, 其能量集中在背景光项, 第四项为物光波的复振幅 $O(x,y)$, 因此, 若使用与记录时共轭的参考光照射, 则重现物光波。

$$R_t(x,y) = t_0 R + p(I_O R + I_R R + 2|O||R|^2 \cos(\phi-\psi))$$

因此, 记录物光波的全息图样, 能够利用参考光或共轭参考光再现物光波的振幅和相位信息。

主要步骤如下: 1. 记录全息图, 2. 计算全息图, 3. 再现全息图。



3. 数据记录

- (1) 全息图记录光路如上图, 记录光路利用全息图记录 (Holographic Optics Toolbox) 软件记录全息图
- (2) 将拍好的全息图 (Holo Alphabet.bmp) 加载到空间光调制器中, 并用 CCD 拍摄全息图的拍摄效果
- (3) 用全息软件 (Holographic Optics Toolbox, HOT) 将拍好的图片 (512x512.jpg), 计算为全息图的计算结果图, 加载到空间光调制器中, 并用 CCD 拍摄全息图的效果
- (4) (5) (6) 搭建全息光路, 将上述记录的全息图加载到空间光调制器中, 拍摄全息图效果

〔数据记录〕

数据已上传 seelight

陈

实验 LX1、LX2 一维和二维振动驻波实验

实验人：路尚润 21305127 合作人：巩元昊 21305179 指导老师：陈文杰¹

(1 中山大学物理系, 广东广州 510275)

摘要：振动驻波是物理学中一个重要的现象，它涉及到机械波的传播和反射；一维驻波是机械波中的一种重要现象，这种波形具有一定的频率和振幅；二维薄板振动是一种研究固体物体振动特性的重要方法，其产生的克拉尼图形可以直观地展示出不同频率和模式下薄板表面的振动状态。在本文中，我们首先利用软绳实现了弦的振动驻波，所求波速为 $a_{exp} = (20.84 \pm 0.42)m \cdot s^{-1}$ ，相对误差为 0.39%，然后实现了若干不锈钢薄片的共振，利用线性拟合以及分别求解的两种方式求解了其杨氏模量，线性拟合结果为： $Y = (203 \pm 2)GPa$ ，分别求解结果为 $Y = 188.1GPa$ ，其与理论值 $193 - 195GPa$ 极为接近，并比较了波节位置，其相对误差均在 1% 左右，接着测量了金属圆环的共振，测得其杨氏模量为 $Y = 133.3GPa$ ，与理论值十分接近，相对误差为 1.26%，最后我们利用 MMA 进行了圆盘的二维振动驻波求解，求得常数 $\bar{c} = 1.074m^2 \cdot s^{-1}$ ，杨氏模量 $Y = 124.5GPa$ ，其均在一般的材料范围值内，并且其振动波节实验值与仿真值十分接近，实验较为成功。

关键词：驻波；克拉尼图形；Mathematica 数值仿真；杨氏模量

1 引言

振动驻波是物理学中一个重要的现象，它涉及到机械波的传播和反射。

一维驻波是机械波中的一种重要现象，一般是在一条介质中传播的波与其反射波相互作用而形成的固定波形。在一维驻波中，介质的两端通常被固定，而波动的能量则在介质中来回传播，从而形成了一种固定的波形。

二维薄板振动是一种研究固体物体振动特性的重要方法。克拉尼图形是一种用于描述薄板振动模式的图形，它通过在薄板表面上撒上细粒子或涂上颜料，并在板上施加振动激励后观察颗粒或颜料的运动轨迹得到。克拉尼图形可以直观地展示出不同频率和模式下薄板表面的振动状态，有助于人们更好地理解和研究薄板振动的特性和规律。

驻波目前在现实中有许多应用，利用其可以实现一些传感器测量^{[1][2]}、热声发动机的实现^{[3][4]}、隔振系统^[5]以及一些无损测量^[6]，应用十分广泛。

在本次实验中，我们首先做了若干一维振动驻波实验，其中包含弦、铁片以及圆环，然后通过 MMA 编程实现了二维圆环振动驻波的求解，实验均较为成功。

2 一维振动驻波实验

2.1 一维均匀柔软弦的横向小振动

考虑一根完全柔软的弦，质量分布均匀，平衡时沿着一条直线绷紧。取该直线为 x 轴，以坐标 x 标志弦的各点。设弦在一个平面上振动，以 $u = u(x, t)$ 表示弦的 x 点在 t 时刻沿垂直于 x 方向的位移。考虑弦 $(x, x + \Delta x)$ 一小段的运动，假设弦的质量线密度为 ρ ， T_1 和 T_2 分别为 x 点和 $x + \Delta x$ 点的张力， θ_1 和 θ_2 为相应倾角（均见图1），则该小段的运动方程为：

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

$$T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 = 0 \quad (2)$$

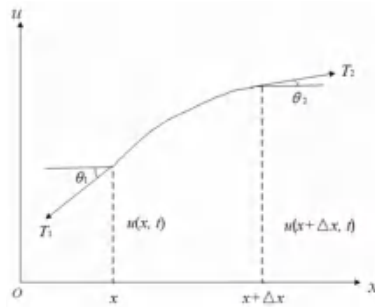


图 1: 弦的横振动一小段受力分析示意图

对于小振动, 可设 θ 角很小, 略去 θ^2 及以上高阶项, 有 $\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2$, 由方程2, 得 $T_1 = T_2 = T$, 即在没有沿 x 方向的外力时, 弦中各点的张力是相同的。方程1成为:

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} &= T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &\approx T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \\ &= T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] \\ &= T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (3)$$

两边消去 Δx , 再令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则有 $\bar{u} \rightarrow u$, 可得:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

其中 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 。方程5即为弦的横振动方程, a 为波速。

又由于 θ 角很小, $|\frac{\partial u}{\partial x}| \ll 1$, 若略去 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ 及以上高阶项, 则弦的伸长可略去, 令 Δs 表示 $(x, x + \Delta x)$ 这一段的伸长, 有:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{du^2 + dx^2} - \Delta x \\ &= \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx - \Delta x \\ &\approx \int_x^{x+\Delta x} dx - \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

因此, 弦中张力 T 在任何时刻都一样, 是一个不随位置与时间变化的常数, 在这种情况下 a 为一常数, 振动满足的波动方程形式为5所示。

在本次实验中, 我们将绳子的两端固定进行振动驻波实验的, 对应的边界条件为 Dirichlet 边界条件, 具体方程为:

$$\begin{cases} X|_{x=0} = 0 \\ X|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

带入后化简并解本征方程可以得到所有的本征值和本征函数为:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad N \in \mathbb{N}^+ \quad (8)$$

2.2 不锈钢薄金属细长条片的小振动

如2所示, 取一根杆静止无弯曲时的中线为 x 轴, 横向位移为 u , 取向上为 u 轴的正向, 假设 x 与 u 在同一平面上。

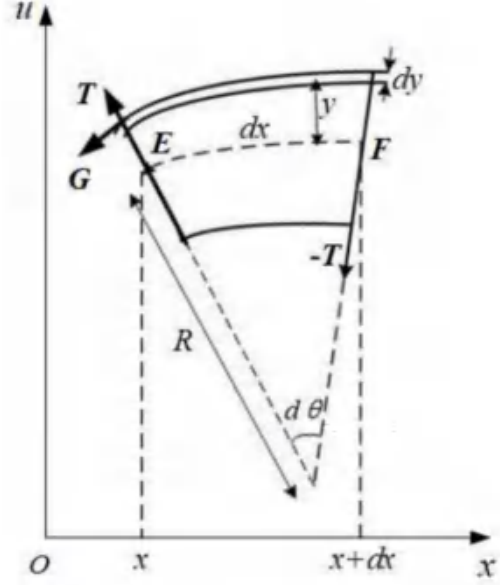


图 2: 杆的一小段受力示意图

考虑长度为 dx 的一段, 杆在弯曲时, 杆的中线 EF 长度不变, 中线一方伸长, 另一方压缩。于是在杆的每一截面出现张力和压力组成的力偶, 其力矩称为挠矩。我们把截面左方施予右方的挠矩记作 M , 右方施予左方的挠矩则记作 $-M$ 。这挠矩抵抗着弯曲。中线 EF 虽然长度不变, 但被弯曲, 我们把它的曲率半径记作 R , 此时2中的 $d\theta = dx/R$ 。中线上被拉长, 受邻段的张力; 中线以下被压缩, 受邻段的压力。划出一个薄层, 它距中线距离为 y 而厚度为 dy , 这个薄层的长度 $= (R + y)d\theta = dx + ydx/R$, 可见它的伸长为 ydx/R , 相对伸长为 y/R , 从而这薄层的张应力为 Yy/R , 张力:

$$dG = \frac{Yy}{R} (bdy) \quad (9)$$

其中 Y 是弹性模量 (杨氏模量), b 是薄层的宽度, d 是薄层的厚度。这张力相对于 E 点的力矩为:

$$dGy = \frac{Y}{R} y^2 b dy \quad (10)$$

作用在整个截面上的挠矩 M 应当是力矩 Gy 的总和,

即:

$$M = \int y dG = \frac{Y}{R} \int y^2 b dy \quad (11)$$

其中积分 $\int y^2 b dy$ 正是截面的“转动惯量”，记作 I 。于是上式可化为:

$$M = \frac{YI}{R} \quad (12)$$

而我们知道，曲率 $1/R = -u_{xx}/(1+u_x^2)^{3/2}$ ，对于小弯曲， $1/R \approx -u_{xx}$ （注意此时这小段杆是向上凸起的，满足 $u_{xx} < 0$ ），所以

$$M = -YI u_{xx} \quad (13)$$

13给出了挠矩的大小与杆在该处的曲率之间的关系。

考虑如2的一小段，两端的切力组成为力偶，其力矩 Tdx 是顺时针方向的，左端的挠矩 $M|_x$ 正向是逆时针的，右端的挠矩 $M|_{x+dx}$ 正向则是顺时针的。于是，有:

$$M|_x - M|_{x+dx} - Tdx = 0 \quad (14)$$

即

$$T = -\frac{1}{dx} \{M|_{x+dx} - M|_x\} = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (15)$$

代入13，得:

$$T = YI u_{xxx} \quad (16)$$

设该小段的横向位移为 u ，则其横向加速度为 u_{tt} ，由牛顿第二定律，有

$$(\rho S dx) u_{tt} = T|_x - T|_{x+dx} \quad (17)$$

其中 ρ 为杆的质量体密度。上式即:

$$\begin{aligned} \rho S u_{tt} &= \frac{1}{dx} \{T|_x - T|_{x+dx}\} \\ &= -\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \\ &= -YI u_{xxxx} \end{aligned} \quad (18)$$

即得杆的横振动方程:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \quad (19)$$

其中

$$a^2 = \frac{YI}{\rho S} \quad (20)$$

令 $\kappa^2 = \frac{I}{S}$ ， κ 称为截面积的迴转半径。在实验操作中，

对不同长度的长条片进行实验，每条长条片可以看作是一端 ($x=0$) 卡住 (即固支)、另一端 ($x=l$) 自由的棒，棒作横向小振动时位移 u 满足方程19。为了研究棒的稳定简谐振动，令 $u = u(x, t) = X(x)e^{-i2\pi ft}$ ，代入19，得:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = k^4 X \quad (21)$$

其中

$$k^4 = 4\pi^2 f^2 \cdot \frac{\rho S}{YI} \quad (22)$$

$$I = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y^2 b dy = \frac{bd^3}{12} \quad (23)$$

方程21可以用特征根法求解。令 $X = e^{\lambda x}$ ，代入方程21，得特征根 $\lambda = \pm k$ ， $\lambda = \pm ik$ 。从而得四个线性无关的特解: $e^{\pm kx}$ ， $e^{\pm ikx}$ ；即得方程21的通解为

$$\begin{aligned} X &= C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx} \\ &= A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C \cos kx + D \sin kx \end{aligned} \quad (24)$$

棒的左端 ($x=0$ 处) 卡住，而右端自由运动，则要求满足边条件:

$$\begin{cases} X|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

把边条件25代入24，得 $C = -A$ ， $D = -B$ 。则24变成:

$$\begin{aligned} X &= A [\cosh(kx) - \cos kx] \\ &+ B [\sinh(kx) - \sin kx] \end{aligned} \quad (26)$$

棒的右端 ($x=l$ 处) 自由，要求该处的弯矩 $M = -YI d^2 X/dx^2$ 及切变力 $F = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{YI d^3 X}{dx^3}$ 均为零，即:

$$\begin{cases} \left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \\ \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

把边条件27代入26，得:

$$\frac{B}{A} = \frac{\sin kl - \sinh kl}{\cos kl + \cosh kl} = -\frac{\cos kl + \sinh kl}{\sin kl + \cosh kl} \quad (28)$$

由28，得关于 k 的方程 (其中 l 为棒长，可由实验测出)，这个便是关于 k 的本征值的方程，决定了可能出

现的振动模式:

$$\cosh kl \cdot \cos kl = -1 \quad (29)$$

用计算机软件对29进行求解,可以解出稳定共振振动时的一系列本征值 $k_n l$, 由小到大分别标记为 $k_1 l = 1.8751$ $k_2 l = 4.6941$ $k_3 l = 7.8548$ 等。

2.3 细钢丝金属圆环的小振动

考虑一根细钢丝金属弯成的圆环,细钢丝横截面是半径为 R 的圆,HT200 细钢丝的杨氏模量现已有值约为 135GPa。

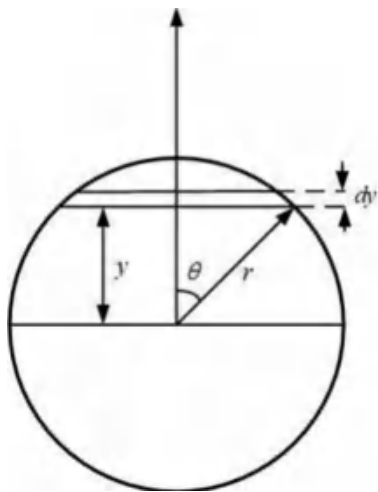


图 3: 细钢丝横截面坐标选取

该细钢丝可看作是一根细杆,为了计算其截面的“转动惯量” I ,取截面坐标系如3,注意 $y = R \cos \theta$, $dy = -R \sin \theta d\theta$, $b = 2R \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, 由23可知,其“转动惯量”为:

$$\begin{aligned} I &= \int y^2 \cdot b \cdot dy \\ &= \int_{\pi}^0 R^2 \cos^2 \theta \cdot 2R \sin \theta \cdot (-R \sin \theta) d\theta \quad (30) \\ &= \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

则其截面积的迴转半径 $\kappa = \frac{R}{2}$ 。设圆环共振时有 n 个波腹,共振圆频率 $\omega = 2\pi f$,则此时共振波长 $\lambda = \frac{4\pi R}{n}$ 。考虑此时的本征值方程29,若令 $k_n l = \pi \beta_n$,则当 $n > 2$ 时,有 $\beta_n \approx (n - \frac{1}{2})$, β_n 即为实际共振时的共振波腹

个数,并且由21,可得杨氏模量;

$$\begin{aligned} Y &= 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot \frac{\rho S}{k^4 I} \\ &= \frac{f^2}{(n - \frac{1}{2})^4} \cdot 256\pi \cdot \rho S \end{aligned} \quad (31)$$

3 二维金属薄板振动驻波实验 (圆形)

3.1 圆形薄金属板小振动方程的导出

当圆形薄板以频率 ω 振动时,其上面任一点 (r, θ) 的竖向位移(挠度) η 的最大值为某一振形函数 $W(r, \theta)$,此时薄板的形变势能 U 的最大值设为 U_{Max} ,振动动能 K 的最大值设为 K_{Max} 。根据瑞利提出的方法,由能量守恒定理,当设定薄板的振形函数 $W(r, \theta)$ 满足边界条件时,令 $U_{\text{Max}} - K_{\text{Max}} = 0$,即可求出振动的固有本征频率 ω 。用变分的语言来说,相当于要求该振形函数 $W(r, \theta)$ 取振幅的特征函数 $Z = Z(r, \theta)$ 时,本征振动振幅的特征函数 Z 和固有频率 ω 应满足以下方程:

$$\delta(U_{\text{Max}} - K_{\text{Max}}) = 0 \quad (32)$$

其中最大形变势能 U_{Max} 和最大动能 K_{Max} 可由变分公式得到。

假定薄板的质量体密度为 ρ ,弹性模量(杨氏模量)为 Y 。设其竖直方向小振动的传播速度(相速)为 u ,圆心为坐标原点, (x, y) 点处 t 时刻的竖向振动位移(挠度)为 $\eta(x, y, t)$ (取静止时的位移为零),由理论声学或弹性力学的知识可知, η 满足以下方程:

$$\nabla^4 \eta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (33)$$

其中 $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, ∇^2 为 Laplace 算符, c 为常数,满足 $\frac{1}{c^2} = \frac{3\rho(1-s^2)}{Yh^2}$, s 是泊松比。对大多数材料, s 约为 0.25-0.33。为了研究板的简谐振动,取极坐标系 (r, θ) ,令 $\eta = Z(r, \theta)e^{-i\omega t}$, Z 分离变量后对 θ 的函数关系是因子 $\cos m\theta$, $\sin m\theta$, 通常应是 $\cos m\theta$ 和 $\sin m\theta$ 的线性组合,于是 Z 的微分方程可写为:

$$(\nabla^2 - \gamma^2)(\nabla^2 + \gamma^2)Z = 0 \quad (34)$$

其中

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (35)$$

对于34, 我们知道 Z 可以是方程

$$(\nabla^2 + \gamma^2)Z = 0 \quad (36)$$

或

$$(\nabla^2 - \gamma^2)Z = 0 \quad (37)$$

的解。通常情况下, 我们应该考虑两者的线性组合, 此时 γ 相当于简谐波的波矢 k 。

3.2 圆形薄板自由边界条件的导出

考虑圆板的支撑点在圆心 $O(0, 0)$ 或圆心附近的点 $P(b, 0)$ ($b = 25\text{mm}$) 的情况, 圆板边界悬空, 其所受的重力可忽略。在这种情况下, 振形函数 Z 在圆心 $r = 0$ 处有限, 而在自由边界 $r = a$ 处的弯曲力矩 M_r 、扭转力矩 $M_{r\theta}$ 及竖向剪力 Q_r 均为零。同时, 连续分布的扭矩 $M_{r\theta}$ 静力上等效于剪力 $\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}$ 。因此, 圆板满足以下边界条件:

$$M_r|_{r=a} = 0 \quad (38)$$

$$\left(Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}\right)|_{r=a} = 0 \quad (39)$$

其中

$$M_r = -E \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (40)$$

$$M_{r\theta} = -E(1-s) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) \quad (41)$$

$$Q_r = -E \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 Z) = -E \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) \quad (42)$$

这里, E 是薄板的抗挠刚度, $E = 2h\rho c^2$; s 为泊松比, 对于铝合金, $s = 0.33$ (注意对于黄铜板, $s = 0.324$)。边界条件38表示:

$$\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) \right] |_{r=a} = 0 \quad (43)$$

边界条件39表示:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) + (1-s) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 Z}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) \right] |_{r=a} = 0 \quad (44)$$

3.3 理论的求解及数值计算

对于方程36和37, 我们可以进行变量分离并分别求解它们在自然边界条件 $r = 0$ 处有限的解。得到方

程34的解的简正模式为:

$$Z = R(r)\Theta(\theta) \quad (45)$$

其中

$$R(r) = [AJ_m(kr) + BI_m(kr)] \quad (46)$$

$$\Theta(\theta) = (C \cos(m\theta) + D \sin(m\theta)) \quad (47)$$

其中, $J_m(x)$ 是第 m 阶贝塞尔函数, $I_m(x)$ 是修正的第 m 阶贝塞尔函数, 满足 $I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$ 。在这里, m 取值为 $0, 1, 2, \dots$ 以满足周期性边界条件 $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi)$ 。对于圆形薄板问题, 我们取 $m = 0, 1, 2, \dots$ 。将45 代入边界条件43, 我们得到:

$$\frac{B}{A} = - \frac{(ka)^2 J_m''(ka) + s \cdot ka J_m'(ka) - s \cdot m^2 J_m(ka)}{(ka)^2 I_m''(ka) + s \cdot ka I_m'(ka) - s \cdot m^2 I_m(ka)} \quad (48)$$

将45 代入边界条件44, 我们得到:

$$\begin{aligned} & k \cdot \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r [AJ_m'(kr) + BI_m'(kr)] \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} (-m^2) [AJ_m(kr) + BI_m(kr)] \right) \\ & + (1-s) \left(-\frac{m^2}{r^2} \cdot k [AJ_m'(kr) + BI_m'(kr)] \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{r^3} [AJ_m(kr) + BI_m(kr)] \right) \Big|_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

通常情况下, 可以将48和49 中的 ka 替换为 x , 然后使用计算软件 (如 Mathematica 或 Matlab) 求解关于 x 的方程, 找出可能的 ka 的根, 即可得到可能的 k 值。为方便起见, 将所有 x_{mn} 按从小到大的顺序排列, 即 $x_{m1} < x_{m2} < \dots$ 。

4 实验装置

4.1 一维振动驻波实验

表 1: 实验仪器及参数

名称	基本参数
PASCO 振动发生器和驱动器	可调频率 1-700Hz
卷尺	量程: 2m, 最小分度值: 0.1cm
电子游标卡尺	/
弹性柔软绳	长度: 236cm, 质量: 10.19g
不锈钢薄金属长条	/
细钢丝金属圆环	长度: 80.19cm, 质量: 4.85g
实验测控用计算机	/
电子拉力计	量程: 30N

4.2 二维金属薄板振动驻波实验（圆形）

功率正弦波函数信号发生器和示波器，圆形薄黄铜板（边长 12cm），焊上细导线的压电陶瓷蜂鸣片，薄双面胶，直尺，细沙，撒沙器，电子天枰，游标卡尺（或螺旋测微器），支撑杆，多孔厚板，垫底的金属盘。实验用测控计算机（安装了 Mathematica）。

5 实验内容

5.1 一维振动驻波实验

(1) 一维弦的横振动实验。

作出绳子共振时一维驻波波腹个数分别为 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15 时的实验，分别测出此时的共振波长 λ ，记下共振频率 f ，求出波速 v ，与理论值进行比较，拍下适当的共振驻波图。

(2) 不锈钢薄金属长条的小振动实验。

测出 6 种不同长度不锈钢薄金属细长条分别对应约半个共振波包 ($n = 1$) 和有约一个半共振波包 ($n = 2$) 时的共振频率 f 及其参数，并测出波节所在位置的坐标，与理论值比较；测出 2 种不同长度不锈钢薄金属细长条对应约两个半共振波包 ($n = 3$) 时的共振频率 f 及其参数，并测出共振波节所在位置的坐标，与理论值比较；分别求出其杨氏模量 Y ，并与现已有值进行比较，拍下适当的共振图。

(3) 细钢丝金属圆环的小振动实验。

测出细钢丝金属圆环共振时波腹数分别为 2、3、4、5、6 时的频率及相关参数，求出杨氏模量 Y ，拍下适当的共振图。

5.2 二维金属薄板振动驻波实验（圆形）

进行原型薄板振动驻波的数值仿真。

6 实验结果与讨论

6.1 一维振动驻波实验

6.1.1 一维均匀柔软弦的横向小振动

在实验中，我们首先测量了细绳的长度和质量，其如表1所示，我们在振动实验中使用的弦原长 $l = 115.1\text{cm}$ ，拉长至 $l' = 122.6\text{cm}$ ，并且用拉力计测出此时张力为 $T = 1.89\text{N}$ ，从而我们算出其理论波速

$$a_{the} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 20.92\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (50)$$

其中 $\rho = M/l$ 为线密度。

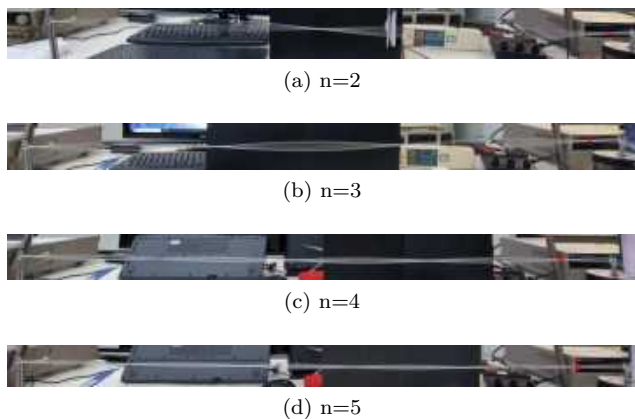
我们将起振器频率从小到大调节，当其振幅最大时，在频率周边进行细调并调节振动器振幅保证其时刻满足小振动条件，记录振动波腹数以及其频率 f ，从而算出其波长 $\lambda = 2l/n$ ，进而得到此时的波速 $\alpha = f\lambda$ ，其数据如表2所示

表 2: 一维弦振动实验结果

n	f/Hz	l'/cm	λ/cm	$\alpha/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
2	17.5	117.90	117.90	20.63
3	26.3	116.50	77.67	20.43
4	35.8	113.20	56.60	20.26
5	45.0	112.50	45.00	20.25
6	53.0	115.25	38.42	20.36
7	60.7	118.80	33.94	20.60
8	69.0	119.50	29.88	20.61
9	79.7	118.79	26.40	21.04
10	88.7	118.35	23.67	21.00
11	96.5	120.00	21.82	21.05
12	104.7	122.60	20.43	21.39
13	113.3	122.60	18.86	21.37
14	122.2	122.60	17.51	21.40
15	130.6	122.60	16.35	21.35

¹ 由于振动的端点并非完全是波节， $l'' = l - \Delta l$ 为此时弦长减去振动点到第一个波节长度后的真实振动长度。

频率较低时，若我们取其振幅最大位置，此时其起振位置并非为节点，会对结果产生较大影响，故我们取其稳定振动时刻。其部分振动图像如下

图 4: 一维弦振动实验图片¹

在频率较高时, 由于此时波长较小, 我们可以发现其节点与振动端基本重合, 此时其有效果图:



图 5: 一维弦振动实验图片 (n=12)

可见此时由于波长较小, 其起振位置与第一个波节基本重合, 故我们认为此时振幅最大时即为其共振时刻。

则我们将所求波速求平均并计算器标准差, 其平均值为

$$a_{exp} = 20.84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (51)$$

标准差为

$$\sigma = 0.42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (52)$$

则我们最终测得结果为

$$a_{exp} = (20.84 \pm 0.42) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (53)$$

相对误差为

$$e = \left| \frac{a_{exp} - a_{the}}{a_{the}} \right| = 0.39\% \quad (54)$$

可见, 相对误差以及标准差较小, 实验较为成功。

误差分析:

本次实验中, 虽然结果与理论基本吻合, 但其误差来源仍然有许多可能性, 经过分析, 误差基本来源如下:

①拉力测量计的不精确。

¹在频率较低时, 振动最右侧的节点与振动端不重合, 我们在图中标出。

在实验中, 我们使用拉力计测量时, 发现其测量数值并非稳定, 其数值在不断波动, 可能是由于绳的震荡以及桌子振动干扰导致的。

②起振器位置并非为波节。

在实验中, 在低频时, 由于此时其振动波长较大, 起振器位置可以明确的观察到其并非波节, 即如果我们此时直接记录将会导致波长偏小, 故我们取其振动稳定且波节能够完整观察到时记录, 并记录下此时波节与起振器的距离, 并用其计算波长, 通过实验结果可以看出, 此方法有效且合理, 但其无可避免地会存在一定的误差。

③人为测量、判断误差。

在实验中, 由于测量长度等均用的是直尺或卷尺, 其一定会产生测量误差, 且在产生共振时其频率是有一定可调性的, 即在一小端频率范围内, 其均呈现类似于共振的现象, 则人为判断共振位置频率必定产生误差, 故实验存在误差是合理的。

6.1.2 不锈钢薄金属细长条片的小振动

我们测量了六个不锈钢片的参数, 并且算出其分别的横截面积以及截面“转动惯量”和材料密度, 其参数以及编号如下表

表 3: 不锈钢片实验参数

参数名称	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
长度 l/cm	13.51	7.55	12.26	8.44	11.50	9.47
厚度 d/mm	0.519		0.519		0.540	
宽度 b/mm	8.097		8.131		8.115	
总质量 m/g			21.03			
密度 $/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$			7854			
横截面积 S/mm^2	4.20		4.22		4.38	
截面 I/mm^4	0.094		0.095		0.106	

我们在此部分使用两种方式对其杨氏模量进行求解, 首先我们利用 MMA 求解出其共振的前几个 $k_n l$, 利用 MMA 进行作图以及求解, 其求解函数图像如下:

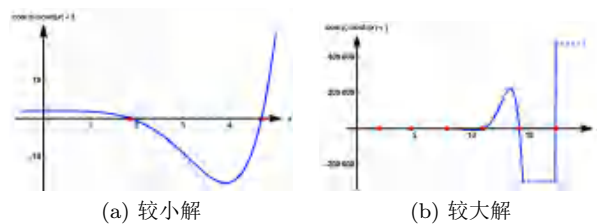


图 6: 薄片共振求解函数图

由图像可以看出，其有无穷多解，因为我们实验中只用到了前几个解，故在此我们仅仅列出几个求解值，其如表4所示

表 4: 薄片 n 对应的共振 $k_n l$

n	$k_n l$
1	1.8751
2	4.6941
3	7.8548
4	10.996

方法一：线性拟合

我们知道，此时 $k_n l$ 满足公式

$$(k_n l)^4 = 4\pi^2 \frac{\rho}{Y} \left(\frac{s}{l} f_n^2 l^4 \right) = 48\pi^2 \frac{\rho}{Y} \left(\frac{1}{d^2} f_n^2 l^4 \right) \quad (55)$$

若此时我们取 $X = (k_n l)^4$ 以及 $Z = \frac{f_n^2 l^4}{d^2}$ ，则可知

$$Z = \frac{Y}{48\pi^2 \rho} X \quad (56)$$

此时我们即可利用拟合的方式得到其斜率，此时即可换算出杨氏模量，Origin 拟合曲线如图7所示

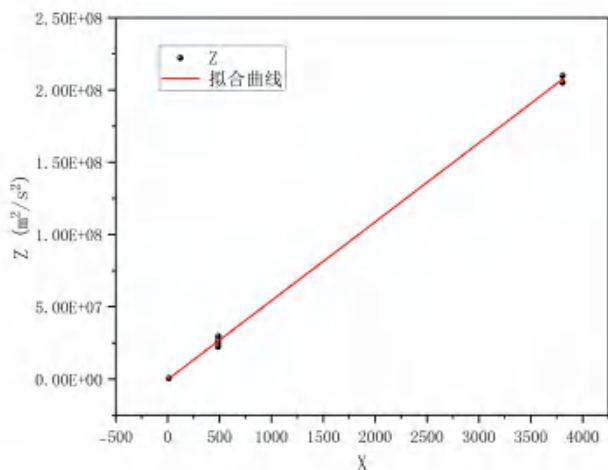


图 7: Origin 拟合曲线 (求解薄片杨氏模量)

根据其斜率以及标准差即可算出

$$Y = (203 \pm 2) GPa \quad (57)$$

而实验讲义给出的不锈钢弹性模量 Y 的值约为 193 – 195 GPa，可见此方法的效果较好，偏差较小。

方法二：分别求解

我们对应 $n=1、2、3$ 分别求解出其杨氏模量并对其进行求解，即利用公式：

$$Y = \frac{48\pi^2 f_n^2 \rho}{d^2 \cdot k_n^4} \quad (58)$$

① $n=1$:

在振动为半个波包时，对应 $n=1$ ，此时有 $k_1 l = 1.8751$ ，即可算出此时薄片的杨氏模量如下表

表 5: 各薄片 $n=1$ 时的共振参数

$n=1$	f/Hz	Y/GPa
$l1$	22.1	181.81
$l2$	72.1	188.75
$l3$	26.3	174.62
$l4$	56.8	182.93
$l5$	29.9	161.40
$l6$	43.5	157.09

② $n=2$:

在振动为一个半波包时，对应 $n=2$ ，此时有 $k_2 l = 4.6941$ ，即可算出此时薄片的杨氏模量如下表

表 6: 各薄片 $n=2$ 时的共振参数

$n=2$	f/Hz	Y/GPa
$l1$	147.4	205.93
$l2$	494.8	226.34
$l3$	173.7	193.94
$l4$	373.9	201.83
$l5$	200.1	184.05
$l6$	282.7	168.93

③ $n=3$:

在振动为两个半波包时，对应 $n=3$ ，此时有 $k_3 l = 7.8548$ ，即可算出此时薄片的杨氏模量如下表

表 7: 各薄片 $n=3$ 时的共振参数

$n=3$	f/Hz	Y/GPa
$l1$	412.0	205.21
$l3$	494.6	200.56

我们对结果求平均，即可得到此时实验测量的杨氏模量

$$Y = 188.1 GPa \quad (59)$$

其也较为接近理论值，故实验较为成功。

我们接下来比较其振幅图像，我们首先利用 MMA 作出其前四种共振图像，其求解结果对应于 11，如图8所示

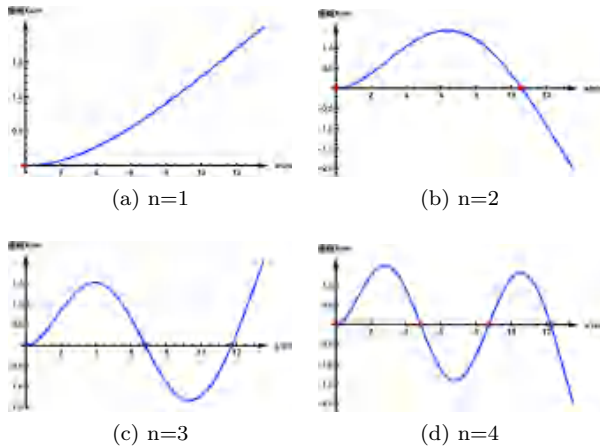


图 8: 薄片共振振幅函数图

我们在实验中进行了拍摄，由于 $n=3$ 时共振振幅较小，此时难以拍摄，且 $n=1$ 时的共振频率较小，导致难以拍摄到振幅残影，故我们给出 $n=2$ 时的共振图，其如图9所示



图 9: 薄片共振振幅实验图 ($n=2$)

其实验中发生的共振与求解出的一致，现象较为明显。

最后我们比较波节位置，利用 MMA 求解出其节点位置，然后与实验测量结果进行比较。

① $n=2$:

在 $n=2$ 时，振动存在一个波节，其波节位置的理论值以及测量值如表8所示

表 8: $n=2$ 时各薄片振动波节位置

薄片编号	理论波节位置/cm	实验波节位置/cm	相对误差
l1	10.58	10.50	0.8%
l2	5.92	5.34	9.8%
l3	9.60	9.60	0.0%
l4	6.61	6.81	3.0%
l5	9.01	9.15	1.6%
l6	7.43	7.74	4.2%

② $n=3$:

在 $n=3$ 时，此时共振薄片存在两个波节，其数据如表9所示

表 9: $n=3$ 时各薄片振动波节位置

薄片编号	理论波节位置/cm	实验波节位置/cm	相对误差
l1	6.80	6.73	1.0%
l1	11.72	11.85	1.1%
l3	6.17	6.30	2.1%
l3	10.64	11.22	5.5%

¹ 表内数据包含了每个薄片的两个波节，并分别计算了相对误差。

此时我们更加直观地显示出其相对误差，利用 Origin 作图即可得到图10，可以直观地看出实验与理论的偏差值。

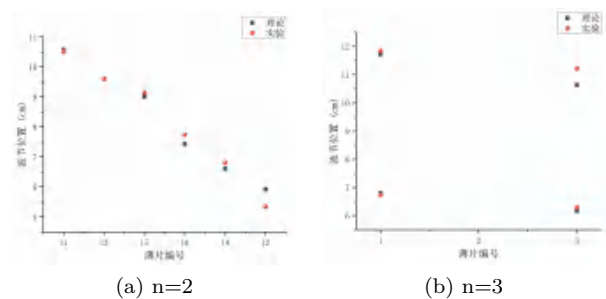


图 10: 薄片波节位置图¹

可以看出，其相对误差较小，基本在 1% 左右，实验较为成功。

误差分析:

实验中的主要误差来源应为:

①测量误差:

实验中我们利用直尺对振动节点进行测量，其振动节点位置很难进行精确测量，人为读数误差较大，并且直尺的测量精度有限，也会产生一定的测量误差。

②共振位置难以判断:

由于薄片的振幅较小，故我们难以判断何时其为共振频率，在一小段范围内，其都会产生一定振幅的共振，故其有一定的频率容差，会产生一定的误差。

我们在存在一定误差的情况下，实现了较小误差的测量，实验效果较好。

¹ 黑色点为理论值，红色点为实测值，其上下的距离即为偏差。

6.1.3 细钢丝金属圆环的小振动

钢丝参数如表1所示，在实验中所用圆环的总周长为 $l' = 74.8\text{cm}$ ，可以得出其密度为

$$\rho = \frac{M}{\pi r^2 l} = 7.75\text{g/m}^3 \quad (60)$$

此时圆环半径为

$$R = \frac{l'}{2\pi} = 11.9\text{cm} \quad (61)$$

其横截面的迴转半径为

$$\kappa = \frac{r}{2} = 0.249\text{mm} \quad (62)$$

实验中测得部分共振图像如图11所示

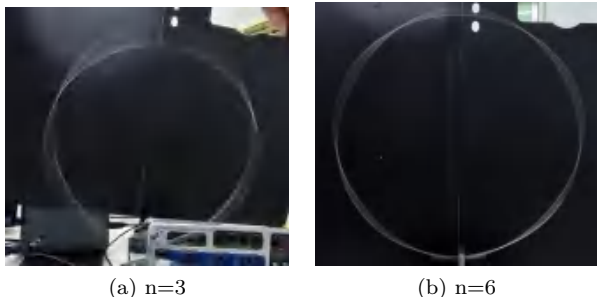


图 11: 圆环共振实验结果图

然后根据测得的共振频率与波腹数目，利用

$$\begin{aligned} Y &= 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot \frac{\rho S}{k^4 I} \\ &= \frac{f^2}{(n - \frac{1}{2})^4} \cdot 256\pi \cdot \rho S \end{aligned} \quad (63)$$

即可算出圆环的杨氏模量如表10所示

表 10: 圆环振动实验结果

n	f	Y
2	7.3	178.54
3	19.1	158.40
4	33.6	127.60
5	50.2	104.24
6	87.8	142.89

但事实上，此公式在 $n > 2$ 时成立，则我们取

$n=3-6$ 所得值的平均值作为实验结果

$$\bar{Y} = 133.3\text{GPa} \quad (64)$$

理论上细钢丝的杨氏模量为 135GPa 左右，我们测得的相对误差为

$$e = 1.26\% \quad (65)$$

可见实验效果较好。

注：在讲义中所给的杨氏模量公式中并未考虑实际波腹对实验的影响，其 n 少了一个 $1/2$ 的偏因子。

误差分析：

在本部分中，实验误差主要来源于人为测量、判断误差，其基本与先前实验一致，不再赘述。

6.2 二维金属薄板振动驻波实验（圆形）

实验中所用圆形金属薄板的各项参数为：半径 $a = 120\text{mm}$ ，半厚度 $h = 0.46\text{mm}$ ，铜板密度为 $\rho = 8.50 \times 10^3\text{kg/m}^3$ ，泊松比 $s = 0.324$ 。

我们首先在各种频率下，测量不同振动的圆形波节线数和辐射状波节线数，并且利用公式

$$c = \frac{2\pi f}{k^2} \quad (66)$$

可以算出对应振动时的常数 c 值，对其求平均，并且利用相速度的计算式：

$$u_{mn} = 2a\sqrt{F f_{mn}} \quad (67)$$

根据实验数据我们可以得到以下结果

表 11: 二维驻波振动实验结果

m	n	k/cm^{-1}	f/KHz	$c/\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$u/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
0	4	1.04	1.83	1.06	109.8
7	3	1.60	4.32	1.06	168.7
4	5	1.80	5.78	1.12	195.3
5	5	1.92	6.31	1.08	203.9
6	7	2.57	11.17	1.06	271.3

可以求得， $\bar{c} = 1.074\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ，则根据其我们可以利用杨氏模量的计算公式得到

$$Y = 3\bar{c}^2 \rho \frac{1-s^2}{h^2} \approx 124.5\text{GPa} \quad (68)$$

其均在一般的材料范围值内，可见实验效果较好。

然后我们分别对每组分析其波节位置偏差，并比较结果图。

1. $m=0,n=4$ 此时实验结果图为

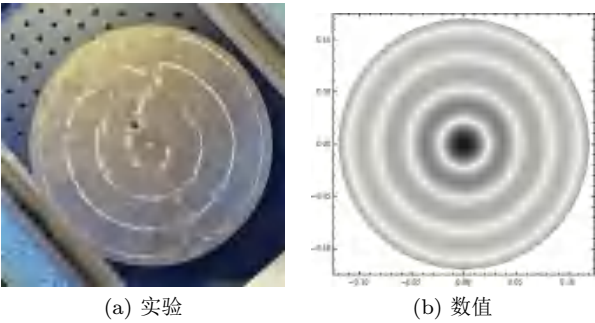


图 12: 二维圆盘共振实验结果图 ($m=0,n=4$)

其波节数值及误差如下表

表 12: 二维圆盘共振波节结果图 ($m=0,n=4$)

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	2.19	2.30	5.0%
2	5.22	5.29	1.4%
3	8.35	8.31	0.5%
4	11.15	11.03	1.0%

2. $m=7,n=3$ 此时实验结果图为

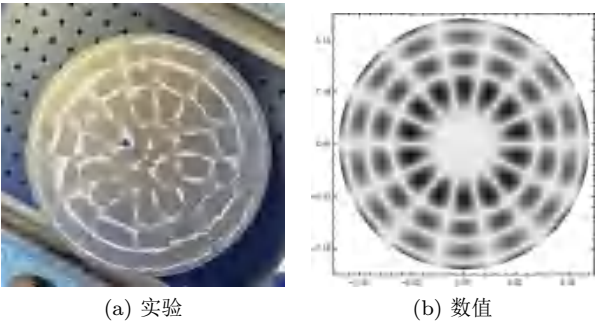


图 13: 二维圆盘共振实验结果图 ($m=7,n=3$)

其波节数值及误差如下表

表 13: 二维圆盘共振波节结果图 ($m=7,n=3$)

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	6.83	6.93	1.4%
2	9.29	9.26	0.3%
3	11.15	11.43	2.4%

3. $m=4,n=5$ 此时实验结果图为

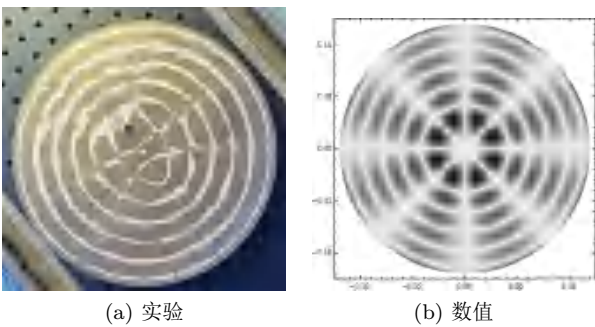


图 14: 二维圆盘共振实验结果图 ($m=4,n=5$)

其波节数值及误差如下表

表 14: 二维圆盘共振波节结果图 ($m=4,n=5$)

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	4.70	4.21	11.5%
2	6.41	6.14	4.4%
3	8.11	7.98	1.7%
4	9.87	9.78	1.0%
5	11.53	11.56	0.3%

4. $m=5,n=5$ 此时实验结果图为

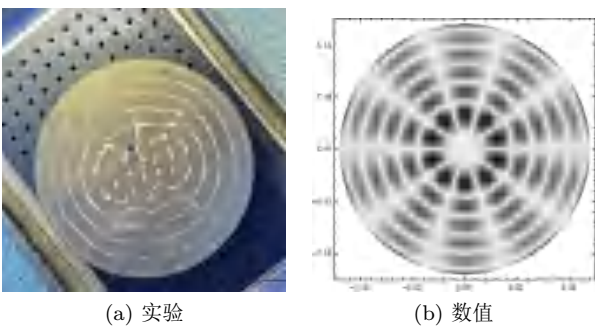


图 15: 二维圆盘共振实验结果图 ($m=5,n=5$)

其波节数值及误差如下表

表 15: 二维圆盘共振波节结果图 ($m=5,n=5$)

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	4.85	4.57	6.2%
2	6.77	6.43	5.3%
3	8.32	8.18	1.7%
4	9.99	9.89	1.1%
5	11.48	11.58	0.8%

5.m=6,n=7 此时实验结果图为

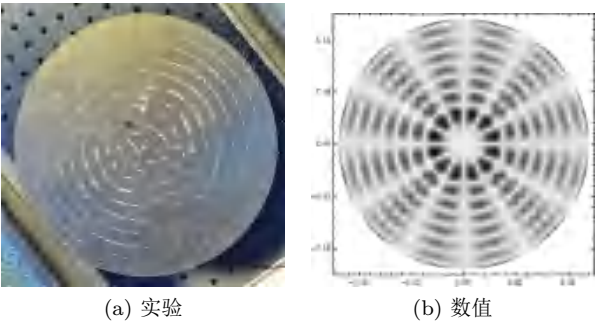


图 16: 二维圆盘共振实验结果图 (m=6,n=7)

其波节数值及误差如下表

表 16: 二维圆盘共振波节结果图 (m=6,n=7)

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	4.42	3.87	14.3%
2	5.90	5.29	11.6%
3	6.77	6.62	2.3%
4	7.97	7.91	0.8%
5	9.21	9.18	0.4%
6	10.35	10.43	0.9%
7	11.47	11.68	1.8%

结果分析： 根据结果我们可以看出，其每组的振动波形的仿真求解与实验基本一致，并且各个波节误差均较小，实验较为成功。

对于误差来源，我们发现对于低级的振动波节误差较大，并且我们在实验中发现，其低级波节并不稳定，此时圆盘上的砂砾有一定的宽度且其并非完整的圆形，故在读取其波节位置时有较大的误差，可能是由于实际实验中各种环境变量影响导致的，并且软件标定方式是选取直径，而直径的选取会有一些的偏差，人为读取也会有一定的误差存在。

我们知道，由于照片是从一个点拍摄的，故此时圆盘会进行缩放，即真实的圆盘应当利用二维图的透视坐标进行变换后的图像，这是拍摄无法避免的，除非我们使用一个平面进行捕捉图像，才会消除这种影响，但由于其半径并不大，故我们可以忽略这个影响。

7 结论

首先，我们进行了若干一维驻波振动实验，其分为三个部分。

第一部分我们先进行了一维弦振动驻波的研究，通过观测其多组共振，并记录其参数，可以算出实验波速为 $a_{exp} = (20.84 \pm 0.42)m \cdot s^{-1}$ ，相对误差为 0.39%，且共振图像十分清晰，并且我们进行了误差分析，实验效果较好。

第二部分我们进行了若干不锈钢薄片的共振测量，计算了其密度、截面积以及其截面的“转动惯量”，并且利用线性拟合以及分别求解的两种方式求解了其杨氏模量，线性拟合结果为: $Y = (203 \pm 2)GPa$ ，分别求解结果为 $Y = 188.1Gpa$ ，其与理论值 $193 - 195GPa$ 极为接近，我们也分析了误差来源；并且我们用 MMA 作出了其共振振幅图，与实验进行了对比，比较了其 n=2 以及 n=3 共振时的波节位置，实验较为成功。

第三部分我们测量了金属圆环的共振，计算了其密度、圆环半径以及截面的迴转半径，利用实验结果算出其杨氏模量为 $Y = 133.3GPa$ ，与理论值十分接近，相对误差为 1.26%，共振图像也十分明了。

最后我们利用 MMA 进行了圆盘的二维振动驻波求解，求得常数 $\bar{c} = 1.074m^2 \cdot s^{-1}$ 、杨氏模量 $Y = 124.5GPa$ ，其均在一般的材料范围值内，并且计算了每组的相速度，比较了实验结果与仿真结果图，以及其振动波节位置的实验值与仿真值，分析了误差来源，并且其误差均较小，实验较为成功。

参考文献

[1] 曲波, 朱蓓丽. 驻波管中隔声量的四传感器测量法 [J]. 噪声与振动控制,2002(06):44-46.

[2] 赵燕东, 王一鸣. 基于驻波率原理的土壤含水率测量方法 [J]. 农业机械学报,2002(04):109-111+121.

[3] 邱利民, 孙大明, 张武, 陈国邦, 甘智华, 严伟林. 大型多功能热声发动机的研制及初步实验第一部分热声发动机的研制 [J]. 低温工程,2003(02):1-7.

[4] 戴巍, 罗二仓, 胡剑英, 张泳, 吴张华, 黄云. 改进型驻波热声发动机的实验研究 [J]. 工程热物理学报,2005(03):376-378.

[5] 熊冶平, 宋孔杰. 柔性隔振系统中驻波效应的研究 [J]. 山东工业大学学报,1995(02):108-113.

[6] 赵燕东, 高超, 张新, 徐强. 基于驻波率原理的植物茎体水分无损检测方法研究 [J]. 农业机械学报,2016,47(01):310-316.

Experiments LX1, LX2

1D and 2D Vibrational Standing Wave Experiments

Shangrun Lu¹

¹ School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Vibrational standing waves are an important phenomenon in physics, involving the propagation and reflection of mechanical waves; one-dimensional standing waves are an important phenomenon in mechanical waves, and such waveforms have a certain frequency and amplitude; two-dimensional thin-plate vibration is an important method for studying the vibrational properties of solid objects, and the resulting Cluny graphs can visualise the vibrational state of a thin-plate surface at different frequencies and modes. In this paper, we first realised the vibrational standing wave of a string using a soft rope, and the resulting wave velocity was $a_{exp} = (20.84 \pm 0.42)m \cdot s^{-1}$ with a relative error of 0.39%. We then realised the resonance of a number of stainless steel sheets and solved for their Young's modulus using both linear fitting as well as separate solutions, with the linear fitting results being: $Y = (203 \pm 2)GPa$ and $Y = 188.1GPa$, which is very close to the theoretical value of $193 - 195GPa$, and compared the position of the wave nodes, the relative error of which is around 1%, then the resonance of the metal ring was measured and its Young's modulus was $Y = 133.3GPa$, which is very close to the theoretical value with a relative error of Finally, we used MMA to solve for the two-dimensional vibrational standing waves of the disc and obtained the constants $\bar{c} = 1.074m^2 \cdot s^{-1}$ and Young's modulus $Y = 124.5GPa$, which are all within the general material range, and the experimental values of the vibrational wave nodes are very close to the simulated values, making the experiment a success.

Key words: Standing waves, Cluny graphs, Mathematica numerical simulation, Young's modulus

A 附录

A.1 原始数据

原始数据已记录于教师签名页以及上传至 seelight 中。

表 17: 二维求解 k 的前 n 个值

解序列 n	$m=0$	$m=7$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
1	0.25077	0.660843	0.38721	0.479805	0.570853
2	0.517031	1.02261	0.714003	0.818863	0.921581
3	0.78084	1.31835	0.994251	1.10428	1.21219
4	1.04372	1.6006	1.26649	1.3798	1.49106
5			1.53518	1.65082	1.76452
6			1.80191	1.91932	2.03489
7					2.30328
8					2.57033

A.2 思考题

1. 该实验还有什么改进的地方?

①实验一中，许多实验结果我们是利用直尺测量，而直尺的最小分度较大，并且在振动时由于振幅较小难以判断其波节，我们可以通过拍摄以及录制的方式利用软件进行读取，会更加精确。

②拉力测量计并非十分精确，我们可以换用更精确的仪器对实验一中的拉力进行测量。

③在二维驻波振动实验中，实验中低级的波节宽度较宽，并且此时驻波并非十分完整，测量有一定的难度，而我们测量时仅仅取了一个长度，我们可以测量多个波节位置，取平均等使得其结果更加精确。

A.3 MMA 代码

源程序 1: 实验一 $k_n l$ 计算及作图

```
Plot[{Cosh[x] Cos[x] + 1}, {x, -0.5, 20},
AxesStyle -> Directive[Black, Thick,
Arrowheads[0.04]],
PlotStyle -> {Blue, Thick}, AxesLabel -> {x,
Cosh[x] Cos[x] + 1},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold],
Epilog -> {PointSize[0.02], Red, Point[{1.87,
0}], Point[{4.694, 0}],
Point[{7.8548, 0}], Point[{10.9955, 0}],
Point[{14.1372, 0}],
Point[{17.2788, 0}]}, ClippingStyle ->
Automatic]
```

```
Table[FindRoot[Cosh[x] Cos[x] == -1, {x, n}],
{n, 0, 20, 1}] // DeleteDuplicates
```

源程序 2: 实验一波节计算及作图

```
k1 = 4.694; l = 13.51; k = k1/l;
B = A (Sin[k l] - Sinh[k l])/(Cos[k l] + Cosh[k
l]);
A = 1;
f[x_] := A (Cosh[k x] - Cos[k x]) + B (Sinh[k x]
- Sin[k x]);
a = 0; (*a和b分别为绘图时x的最小值和最大值*)
b = l;
Plot[{f[x]}, {x, a, b},
AxesStyle -> Directive[Black, Thick,
Arrowheads[0.04]],
PlotStyle -> {Blue, Thick}, AxesLabel ->
{"x/cm", "振幅X/cm"},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold],
Epilog -> {PointSize[0.02], Red,
Table[Point[{Table[x /. FindRoot[f[x], {x, i,
i + 0.5}], Method -> "Secant"], {i, a, b,
0.5}][[i]], 0}], {i, 2, IntegerPart[(b -
a)/0.5] + 1}], ClippingStyle -> Automatic]

Table[x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.5}], Method
-> "Secant"], {i, a, b, 0.5}]
B = A (Sin[k2 l] - Sinh[k2 l])/(Cos[k2 l] +
Cosh[k2 l]);
A = 1;
f[x_] := A (Cosh[k2 x] - Cos[k2 x]) + B (Sinh[k2
x] - Sin[k2 x]);
Table[x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.5}], Method
-> "Secant"], {i, a, b, 0.5}]
```

通过设定 $k l$ 与 l 即可实现各种情况下的作图。

源程序 3: 实验二 k 计算及作图

```
m = 0;
a = 12;
s = 0.324;
xa := x a;
aa11 = x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] + s x
D[BesselJ[m, xa], {x, 1}] -
s m^2 BesselJ[m, xa];
aa22 = x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] + s x
```

```

D[BesselI[m, xa], {x, 1}] -
s m^2 BesselI[m, xa];
ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
s) x) D[
BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
BesselJ[m, xa];
ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
s) x) D[
BesselI[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
BesselI[m, xa];
f[x_] := aa11 ba22 - aa22 ba11
a1 = 0.1; (*a和b分别为绘图时x的最小值和最大值*)
b = 3;
Plot[{f[x]}, {x, 0, 3}, PlotRange -> 2,
AxesStyle -> Directive[Black, Thick,
Arrowheads[0.04]],
PlotStyle -> {Blue, Thick}, AxesLabel -> {x,
Y},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold],
Epilog -> {PointSize[0.02], Red,
Table[Point[{Table[
x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.1}, Method
-> "Secant"], {i,
a1, b, 0.1}][[i]], 0}], {i, 2,
IntegerPart[(b - a1)/0.1] + 1}]],
ClippingStyle -> Automatic]
Table[x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.1}, Method
-> "Secant"], {i,
a1, b, 0.1}]

```

源程序 4: 实验二波节位置计算

```

m = 6
a = 12
s = 0.324
xr := x r
xa := x a
aa11 = BesselJ[m, xr]
aa22 = BesselI[m, xr]
ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
s) x) D[
BesselJ[m, xa], {x, 1}] +
(3 - s) m^2 BesselJ[m, xa]

```

```

ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
s) x) D[
BesselI[m, xa], {x, 1}] (3 - s) m^2 BesselI[m,
xa]
n = ({
{aa11, aa22},
{ba11, ba22}
})
f[x_, r_] := Evaluate[Det[n]]
h[r_] = f[2.57033, r]
Plot[h[r], {r, 0, 12}]

FindRoot[h[r], {r, 4}]
FindRoot[h[r], {r, 5}]
FindRoot[h[r], {r, 7}]
FindRoot[h[r], {r, 8}]
FindRoot[h[r], {r, 9}]
FindRoot[h[r], {r, 10.5}]
FindRoot[h[r], {r, 12}]

```

源程序 5: 实验二波节作图 (m=0)

```

m = 0
a = 0.12
s = 0.324
xr := x r
xa := x a
aa11 = BesselJ[m, xr]
aa22 = BesselI[m, xr]
ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
s) x) D[
BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
BesselJ[m, xa]
ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
s) x) D[
BesselI[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
BesselI[m, xa]
n = ({
{aa11, aa22},
{ba11, ba22}
})
f[x_, r_] := Evaluate[Det[n]]
h[r_] = f[104.372, r]

```

```

Z[r_, \[Theta]_] := h[r];
ZxyABS[r_, \[Theta]_] := {r*Cos\[Theta],
  r*Sin\[Theta], -Abs[Z[r, \[Theta]]]};
dr = 0.12*0.005; d\[Theta] = 2*\[Pi]*0.005;
LstABS =
  Flatten[Table[
    ZxyABS[r, \[Theta]], {r, 0, 0.12, dr},
    {\[Theta], 0, 2*\[Pi],
    d\[Theta]}], 1];
ListContourPlot[LstABS, Contours -> 12,
  ContourStyle -> None,
  PlotRange -> Full, ColorFunction ->
    "GrayTones",
  RegionFunction ->
    Function[{x, y}, 0 \[LessSlantEqual] x^2 + y^2
    < 0.12^2]]

```

```

LstABS =
  Flatten[Table[
    ZxyABS[m, r, \[Theta]], {r, 0, 0.12, dr},
    {\[Theta], 0, 2*\[Pi],
    d\[Theta]}], 1];
ListContourPlot[LstABS, Contours -> 20,
  ContourStyle -> None,
  PlotRange -> Full, ColorFunction -> "GrayTones",
  RegionFunction ->
    Function[{x, y}, 0 \[LessSlantEqual] x^2 + y^2
    < 0.12^2]]

```

A.4 教师签名页

源程序 6: 实验二波节作图 ($m \neq 0$)

```

m = 6
a = 0.12
s = 0.324
xr := x r
xa := x a
aa11 = BesselJ[m, xr]
aa22 = BesselI[m, xr]
ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
  x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
  s) x) D[
  BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
  BesselJ[m, xa]
ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
  x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 -
  s) x) D[
  BesselI[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
  BesselI[m, xa]
n = ({
  {aa11, aa22},
  {ba11, ba22}
})
f[x_, r_] := Evaluate[Det[n]]
h[r_] = f[257.033, r]
Z[m_, r_, \[Theta]_] := Sin[m*\[Theta]]*h[r];
ZxyABS[m_, r_, \[Theta]_] := {r*Cos\[Theta],
  r*Sin\[Theta], -Abs[Z[m, r, \[Theta]]]};
dr = 0.12*0.005; d\[Theta] = 2*\[Pi]*0.005;

```


No.		
Date:		
9	79.7Hz	3.81cm
10	88.7Hz	4.25cm
11	96.5Hz	2.60cm
12	104.7Hz	0cm
13	113.3Hz	0cm
14	122.2Hz	0cm
15	130.6Hz	0cm
二. 铁片: 13.51 7.55		
12.26	8.44	11.50 9.49cm
厚度 0.519mm	0.519mm	0.540mm
宽度 8.097mm	8.131mm	8.15mm
质量 21.03g		
频率 f	22.1Hz 72.1Hz	26.3Hz 56.8Hz 29.9Hz 43.5Hz
- 频率 f	147.4Hz 494.8Hz	173.7Hz 373.9Hz 200Hz 282.7Hz
X	10.8cm 0.39cm	9.6cm 6.81cm 9.15cm 7.74cm
		409.8Hz 6.90cm
频率 f	412.0Hz	444.6
X ₁	6.3cm	6.30cm
X ₂	11.85cm	11.22cm
三. 铝环: 21 = 0.997mm 80.14cm 14.85g d = 2.49cm, 2.95cm		
频率 f	7.3Hz	14.1Hz
3	14.1Hz	33.6Hz
4	33.6Hz	50.2Hz
5	50.2Hz	87.8Hz
6	87.8Hz	

图 2: 实验数据及签名页 2

实验(11.1) = 二维多晶薄膜振动的频率(图形)

实验(11.1) 陈南川 于 2023/12/7

实验日期: 2023年6月2日

实验地点: 陆嘉莹

[实验目的]

1. 熟悉《数学物理方程与力学》等课程中二维弹性问题的求解过程, 熟悉并掌握条件
2. 利用正弦波函数去拟合与发生干涉, 作频率的图形与弹性问题二维弹性问题, 通过实验的手段得到弹性常数与弹性问题的特征值与特征位置, 测出相关物理量, 并进行数值拟合, 作出驻波图
3. 把理论值与实验值进行比较

[实验原理]

薄膜振动的频率图形是一个经典的课题, 是首先由瑞利观察并进行了系统的研究, 在一个材料表面撒有稀薄沙粒的弹性薄板, 自由振动时, 沙子会堆积在节点上, 形成驻波图形。

1. 二维多晶薄膜振动的频率图形

当圆形薄膜以频率 ω 振动时, 其上面任一点 (r, θ) 的竖向位移 (按边) 的实数值为 $W(r, \theta)$, 此时薄膜的形变势能 E 的最大值为 U_{max} , 动能的最大值为 K_{max} , 由能量守恒原理, 当该点位移 $W(r, \theta)$ 满足边界条件时, $U_{max} - K_{max} = 0$, 即得到振动的固有频率 ω , 用上述结论求取, 得到驻波图形 $W(r, \theta)$ 与振动的特征函数 $\psi(r, \theta)$ 时, 求取振动的特征值 ω 与固有频率 ω 。

$$U_{max} - K_{max} = 0$$

其中最大形变势能 U_{max} 与最大动能 K_{max} 分别为

$$U_{max} = \frac{E}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 r dr d\theta$$

$$K_{max} = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R W^2 r dr d\theta$$

由此可以求出固有频率 ω , 其中 E 为材料刚度, ρ 为材料密度, 由于薄膜每单位面积上的质量 $m = \rho h$, 所以固有频率 $\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho h}}$, 其中 $\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho h}}$ 。

$$\omega^4 h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial r^2} = 0$$

把 $\omega = \omega(r, \theta) = \omega(r, \theta) e^{i\omega t}$ 代入上式, 得到固有频率为

$$E \nabla^4 W - 2 \rho h \omega^2 W = 0$$

其中 ∇^4 为拉普拉斯算子, 满足 $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, 令 $\eta = \omega(r, \theta) e^{-i\omega t}$, 则方程变为 $\nabla^4 \eta = 2 \rho h \omega^2 \eta$, 即 $\nabla^4 \eta = 2 \rho h \omega^2 \eta$ 。

图 3: 实验数据及签名页 3

实验 RX1 热传导过程的 COMSOL 模拟

实验 RX2 基于 LabVIEW 的 PID 控温设计实验

实验人：路尚润 21305127 合作人：巩元昊 21305179 指导老师：陈文杰¹

(1 中山大学物理系, 广东广州 510275)

摘要：LabVIEW 是实验室虚拟仪器集成环境的简称，其不仅是一个虚拟仪器开发的环境，还是一种编程语言，功能性极强。COMSOL 是求解偏微分方程或方程组时对多物理场耦合进行分析的软件，其有许多集成模块。热传导时热量传递的三种基本方式之一，在各向同性的热导体，热导体服从傅里叶导热定律，能够在热导体中呈现出明显的温度特征。在本实验中，我们首先利用 COMSOL 进行了热传导实验的仿真，从双层模型到四层模型，再不断优化模型参数，不断对比仿真结果与设定参数，对比得出修正因子的重要性，并且通过设定不同的修正因子 A，可以得到模型升温速率以及加热面和中心面温差随修正因子增大而增大。然后我们利用 LabVIEW 进行了电阻热传导性质的研究，通过搭建 LabVIEW 与 Rigol 平台进行联动，研究了不同加热电压下的电阻升降温过程曲线，同时利用 LabVIEW 中的 PID 控温程序研究了不同参数下电阻升温曲线与目标温度的跟随情况以及波动情况，得出最佳参数后进行了阶跃函数的跟随情况研究，其效果较好，最后自主设计搭建了一种控制器，通过仿真可以看出其跟随效果较好。实验较为成功。

关键词：LabVIEW;COMSOL Multiphysics; 热传导; PID 控温; 电阻加热

1 引言

热传导模型是热学的重要问题^[1]，热传导指的是 (thermal conduction) 是介质内无宏观运动时的传热现象，其实质是由物质中大量的分子热运动互相撞击，而使能量从物体的高温部分传至低温部分，或由高温物体传给低温物体的过程^[2]。热传导模型一般难以进行解析求解，一般的方式为采用数值求解或用软件仿真^[3]。现如今，许多工程都与热传导密切相关^[4]，对热传导模型进行深度研究对众多工程领域都有着较大的帮助。

COMSOL 仿真软件功能强大，其不仅可以适用于温度场的模拟^[5]，还在各种领域 (光学，电磁学，流体力学等) 有无可比拟的仿真效果^{[6][7][8]}。并且其也是实验教学的重要软件之一^{[9][10]}。

LabVIEW 不同于其他计算机语言，其用的是图形化编辑语言 G 编写程序，产生的程序是框图的形式。其能够进行多种数据采集^[11]及仿真实验，其有许多的应用^[12]，功能十分强大。

在本文中，我们首先利用 COMSOL 软件仿真不良热导体实验的加热过程，逐渐完善模型，不断逼近真实情况，得到了温差和中心面温度随时间变化的关系。然后通过搭建 LabVIEW 与 Rigol 平台进行联动，

研究了不同加热电压下的电阻升降温过程曲线，利用 LabVIEW 中的 PID 控温程序研究了不同参数下电阻升温曲线与目标温度的跟随情况以及波动情况，得出最佳参数后进行了阶跃函数的跟随情况研究，最后自主设计搭建了一种控制器。

2 实验原理

2.1 热传导过程的 COMSOL 模拟

2.1.1 COMSOL 简介

COMSOL Multiphysics 是一款基于有限元，通过求解偏微分方程或偏微分方程组对多物理场耦合进行分析的软件，由瑞典的 COMSOL 公司设计。创始人 Svante Littmarck 和 Farhad Saeidi。COMSOL Multiphysics 最早为 Matlab 的一个偏微分工具箱，称为 Toolbox1.0，后改名为 Femlab1.0。从 2005 年的 Femlab3.2 版本开始，正式命名为 COMSOL Multiphysics。经过多年发展，该软件已在企业的产品研发、科学研究等领域得到广泛应用，针对不同的专业领域开发了许多专用的求解模块，如传热模块 (Heat Transfer Module)、射频模块 (RF Module)、结构力学模块 (Structural

Mechanics Module)、声学模块 (Acoustics Module) 等等。本实验中拟采用其中的传热模块来模拟不良热导体实验的加热过程。

2.1.2 准稳态法测热导率

考虑如图?? 所示的一维无限大导热模型初始温度为 t_0 , 在平板两侧同时施加均匀的指向中态面的热流密度 q_c , 则平板上各处的温度将随加热时间 τ 而变化, 故 x 处的温度可表示为 $t(x, \tau)$ 。如图?? 所示, 以样品中心为坐标原点, 则上述模型的热运动方程可写为

$$\begin{cases} \partial t(x, \tau) / \partial \tau = a \partial^2 t(x, \tau) / \partial x^2 \\ \partial t(R, \tau) / \partial x = q_c / \lambda, \quad \partial t(0, \tau) / \partial x = 0 \\ t(x, 0) = t_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a = \lambda / \rho c$, $q_c = c \rho R \partial t / \partial \tau$, λ 为材料的导热系数, ρ 为材料的密度, c 为材料的比热。

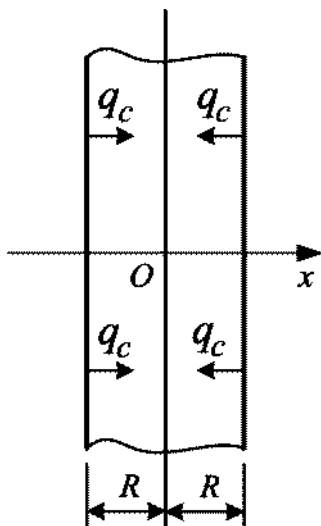


图 1: 理想无限大不良导体平板

方程 (1) 的解为

$$t(x, \tau) = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau + \frac{1}{2R} x^2 - \frac{R}{6} + \frac{2R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi}{R} x \cdot \exp \left(-\frac{an^2\pi^2}{R^2} \tau \right) \right] \quad (2)$$

可见, 随着加热时间的增加, 样品各处的温度将发生变化。式 (2) 右边的级数求和项中存在指数衰减因子, 定量分析表明, 当加热时间 τ 满足 $a\tau/R^2 > 0.5$ 时, 该求

和项可以忽略, 则式 (2) 简化为

$$t(x, \tau) = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau + \frac{1}{2R} x^2 - \frac{R}{6} \right] \quad (3)$$

则如图?? 所示可知, 被测样品中心 ($x = 0$) 和表面 ($x = R$) 处的温度分别为,

$$\begin{cases} x = 0, t(0, \tau) = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau - \frac{R}{6} \right] \\ x = R, t(R, \tau) = t_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a}{R} \tau + \frac{R}{3} \right] \end{cases} \quad (4)$$

两处的温度随加热时间 τ 线性上升, 升温速率为 $aq_c/\lambda R$, 这是一个跟材料导热性能和实验条件有关的参数。而加热面和中心面间的温度差为

$$\Delta t = t(R, \tau) - t(0, \tau) = q_c R / 2\lambda \quad (5)$$

可见, 该状态下被测样品各处匀速升温, 而 Δt 与加热时间 τ 无关并保持恒定, 这种状态称为准稳态。则样品的导热系数为

$$\lambda = q_c R / 2\Delta t \quad (6)$$

样品的比热为

$$c = q_c / (\rho R dt/d\tau) \quad (7)$$

其中 $dt/d\tau$ 为样品的升温速率, 准稳态下, 样品各处的升温速率相等。可见只要测出准稳态下, 样品表面和中心处的温度差及样品的升温速率, 就可以计算出被测样品的热导率 λ 和比热 C 。

2.2 基于 LabVIEW 的 PID 控温设计实验

2.2.1 LabVIEW 简介

LabVIEW 是实验室虚拟仪器集成环境 (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) 的简称, 由 NI 公司的创始人杰姆 - 特鲁查德 (James Truchard) 博士、杰夫-柯德斯凯 (Jeff Kodosky) 博以及他们的好友杰克 - 麦克里森等人设计, 于 1986 年 05 月首先在 Macintosh 计算机上实现, 该时间甚至早于 Microsoft 公司推出图形化的 Windows 操作系统。

由于 LabVIEW 中定义了数据模型、结构类型、模块调用语法规则等编程语言所需要的各种基本要素, 在功能完整性和应用灵活性上不逊于任何高级语言, 因此 LabVIEW 不仅仅是一个虚拟仪器开发环境, 还与常规的 BASCI、C、Delphi 等语言一样, 是一种编程语言。

但与这些文本编程语言不同, LabVIEW 采用的是图形化的编程方式, 故称为 G (Graph) 语言。

2.2.2 自动控制系统介绍

自动控制是指在没有人的直接干预下, 利用物理装置对生产设备和工艺过程进行合理的控制, 使被控制的物理量保持恒定或一定规律的变化。实现自动控制目标而建立的组合体称为自动控制系统。常见的自动控制方式包括了开环控制 (图 ??)、闭环控制 (图 ??)。

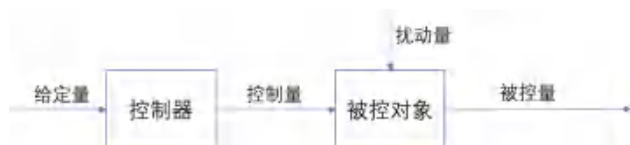


图 2: 开环控制结构图



图 3: 闭环控制结构图

以本实验为例, 电阻是我们的被控对象, 电阻通电流后产生焦耳热, 在没有隔热的情况下, 通过空气对流散热达到平衡。现在为了把电阻控制在目标温度, 通过调节电阻的输入电压 (或电流), 改变其焦耳热, 使之在一定时间内达到新的散热平衡, 稳定在目标温度下。此过程中, 电阻的温度是被控制量, 读取电阻温度的装置 (热电偶、红外测温等) 是探测器, 获得温度反馈量, 设定的目标温度是给定量, 电阻的输入电压或电流为控制量。本实验中, 选择 Labview 平台提供控制算法和硬件驱动, 和 Rigol 电源协同实现控制器的功能。

2.2.3 PID 控制介绍

闭环控制中, 控制器的实现包括控制算法和硬件实现两个重要部分。其中, 控制算法是指根据给定量和反馈量产生的偏差, 计算控制器输出量的实现算法。传统的控制算法有 PID (比例 Proportion、积分 Integral 和微分 Derivative) 控制、模糊控制、神经网络控制等。

PID 控制是应用最广泛的时域控制方案之一, 其核心思想是控制量反馈与给定量的偏差, 分别根据其比例 (P), 随时间的积分 (I) 和时间微分 (D) 的不同权重贡献, 获得输出控制量, 进而实现对被控对象的控制。经典的 PID 控制器框图如图 ?? 所示。

PID 控制中, 比例控制参数 K_p 反映了控制量对偏差量的实时响应程度, 调节 K_p 值同时影响系统的响应速度和稳态精度, 抑制扰动对系统稳态的影响。如果 K_p 参数设置不合适, 则可能会出现系统超调或振荡, 甚至出现不稳定, 另外, 在纯比例控制的情况下, 有时会出现系统平衡时与设定目标保持恒定差值, 即稳态误差无法消除的情况。

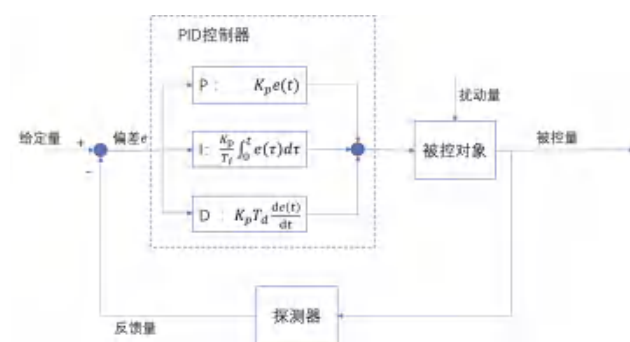


图 4: PID 控制框图

2.2.4 控制论基础

控制系统是根据被控对象的动力学特征执行调控, 最早发展的理论基础是系统在时域下研究系统的稳定性特征, 进一步发展到频域内的考察系统的频域响应特性。添加控制器或利用反馈量进行控制, 本质上是改变了原来动的学特性, 使之响应特性发生改变。宏观系统的动力学过程可用微分方程进行描述, 以本实验为例, 假设电阻内部的温度平衡比对流换热过程要快, 因此利用集总参数法, 即用单一温度 T 描述电阻加热时环境的升降温过程, 列出以下常微分方程:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = hA(T_e - T) + Q \quad (8)$$

其中, ρ 是电阻的平均密度, V 是电阻体积, C_p 是电阻的平均比热容, $\rho V C_p$ 是电阻的总热容。 h 是空气对流换热系数, A 是电阻的表面积, hA 对应电阻表面整体的换热系数, T_e 是环境温度。 Q 是电阻的焦耳热。考察在环境温度不变的情况下, 温度对输入功率的响应, 引

入 $\theta = T - T_e$, 对 (8) 进行 Laplace 变换, 可以得到:

$$s\theta = -\frac{hA}{\rho VC_p}\theta + \frac{Q}{\rho VC_p} \quad (9)$$

令 $\frac{\rho VC_p}{hA} = \tau$, $\frac{Q}{\rho VC_p} = q$, 可以将 (9) 式整理为:

$$\frac{\theta}{q} = \frac{\tau}{1 + \tau s} \quad (10)$$

(10) 称为输入量 q 与输出量 θ 传递函数, 反映了这个系统的响应特性。可由下图表示输入输出量之间的关系:

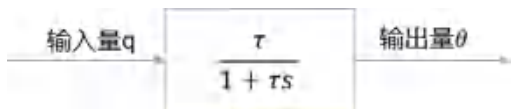


图 5: 室温恒定时电阻温度对功率的响应

当输入量 q 为阶跃函数时, $q = 1/s$, 由 (10) 可以获得输出量 θ 为:

$$\theta = \frac{\tau}{s(1 + \tau s)} = \tau \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right) \quad (11)$$

通过 Laplace 反变换即可以温度的在加热量影响下的时域响应。此处不详细展开。对比图 2 闭环控制结构可知, 传递函数 (10) 对应了被控对象, 其输出量经过反馈后与设定量做差后输入到控制器, 由控制器动态调节输入量 q , 实现更快速地达到设定值的目标。以 P 控制为例, 对室温恒定情况下的电阻温度进行控温调节, 其系统示意图如下:

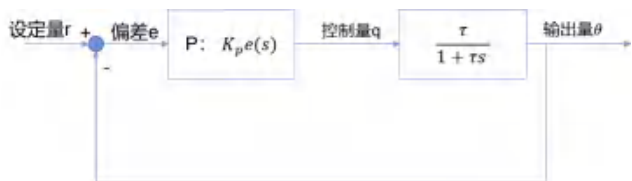


图 6: P 控制下电阻系统示意图

利用 $e = r - \theta$, $q = K_p e$, 可得输出量 θ 与设定量 r 的响应函数关系为:

$$\frac{\theta}{r} = \frac{k\tau}{1 + k\tau + \tau s} = \frac{k\tau/(1 + k\tau)}{1 + \tau s/(1 + k\tau)} \quad (12)$$

对比 (10) 和 (12) 式, 结合传递函数的物理意义可以发现, 在一阶响应近似的情况下, 系统达到稳定所需的时

间由分母中 s 的系数决定, 由于 P 控制器的存在, 使得 θ 的响应特征时间由原来的 τ 变为 $\tau/(1 + k\tau)$, 说明系统达到平衡的时间常数变短, 即系统会更快达到稳定。

3 实验装置

3.1 热传导过程的 COMSOL 模拟

实验测控用计算机 (安装了 COMSOL 软件)。

3.2 基于 LabVIEW 的 PID 控温设计实验

实验测控计算机 (安装了 NI LabVIEW 软件和电源的驱动程序), Rigol DP802A 可编程直流电源, NI CompactDAQ 单槽机箱和 NI9211 数据采集, 多孔板, 导线, 电阻等。

4 实验内容

4.1 热传导过程的 COMSOL 模拟

- (1) 利用 COMSOL 建立不良热导体热传导率测量实验的样品升温模型, 建立双样品模型, 进行求解。
- (2) 改进模型, 做出与实际的“不良导体热传导率的测量”实验比较相符的 COMSOL 模拟结果, 即做出四个有机玻璃板, 再加上两个加热面膜, 共六个长方体的仿真模型进行模拟。
- (3) 再次改进模型, 做出与实际的“不良导体热传导率的测量”实验更加相符的 COMSOL 模拟, 即加热功率不用修正因子 (取 $A=1$), 通过在六块板 (含两块加热膜) 四周加上相应阻热层, 阻热层与外面空气有热交换, 而六块板前后仅接触样品的部分板面绝热, 阻热层为 PP 板。
- (4) 最后在六块板前后两板面上加上厚泡沫板作为隔热层但不完全绝热, 得出与实验基本符合的模型。
- (5) 调整热流密度的修正因子 A 的取值, 观察修正因子 A 的影响。

4.2 基于 LabVIEW 的 PID 控温设计实验

- (1) 按照接线图连接设备, 将热电偶贴在电阻上。在 LabVIEW 搭建 RIGOL 驱动程序, 测试温度计读取程序和电阻加热。

- (2) 测试 5-10V 不同加热功率下的升温 and 降温曲线，记录在当前环境下，电阻电压为 10V 时，电阻能升到最高温度 T_{max} ，同时记录室温 T_e 。
- (3) 程序中加入 PID 控制器模块，根据图 ?? 闭环控制结构做好程序。
- (4) 调试设定点温度为 $T_1 = \frac{T_{max} + T_e}{2}$ ，改变 K_p, T_i, T_d ，观测从相同 T 出发时的控温效果，选择响应时间最短，波动和超调最少的参数。
- (5) 根据教师现场提供的包含四个设定温度的阶跃曲线，在 PID 参数不变的情况下，测试电阻与设定温度的跟随情况。利用归一化时间，评价控温的偏离程度。

5 实验结果与讨论

5.1 热传导过程的 COMSOL 模拟

5.1.1 双样品模拟

我们通过 COMSOL 中“三维”组件，建立了仿真模型如图 ??，其中通过“分割域”的功能，得到了加热面区域。

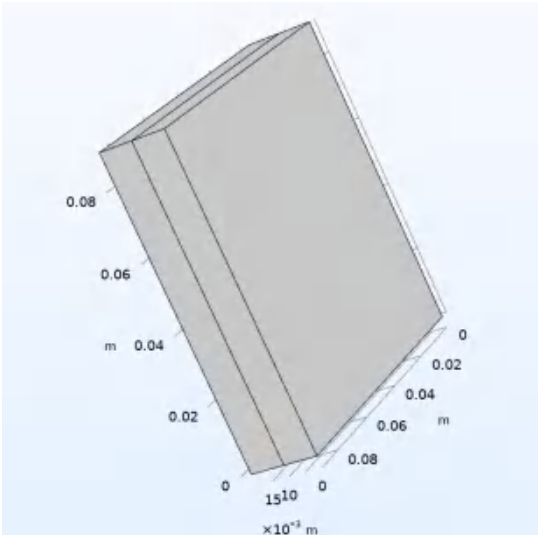


图 7: 双层仿真模型

材料系数选择为导热系数 $\chi = 0.168 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ，密度 $\rho = 1196 \text{ kg}/\text{m}^3$ ，恒压热容 $C_p = 1333 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。
设置固体传热模型，热通量等设置参数如表 ??

表 1: 双层模型参数

参数名称	参数值	参数意义
Volt	19 V	加热电阻
Rr	109.74Ω	加热膜电阻
SS	0.0081 m ²	加热膜面积
AA	0.85	修正因子
Qc	3.2896 W	单侧膜发热功率
qin	172.6 W/m ²	单侧热流密度

选取加热面与中心面插入探针，并进行输出作图其仿真结果如图 ??

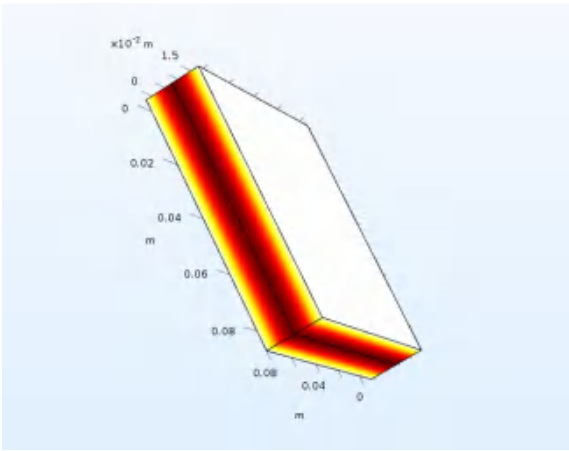


图 8: 双层仿真模型结果

输出数据作图

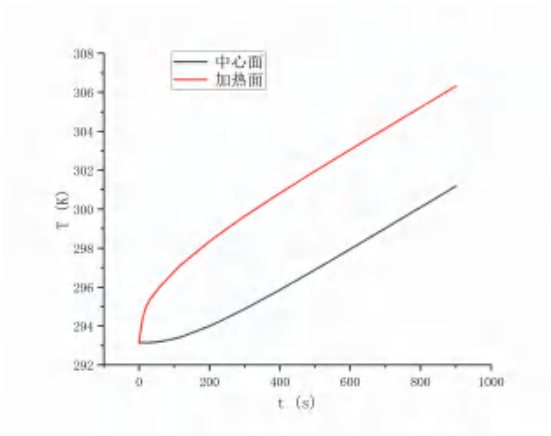


图 9: 双层仿真温度结果

做出两者温差，并且作图可得

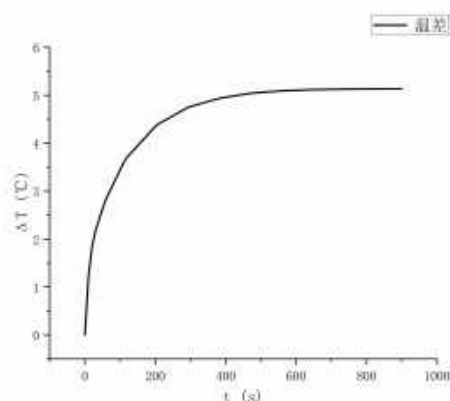


图 10: 双层仿真温差结果

可见, 在初始 0-50s 时, 受材料的导热性质影响, 一开始热量并不能迅速传导到中心面, 此时加热面的温度迅速上升, 中心面的温度受到导热影响逐渐升温; 从 50s 开始, 热量传导逐渐稳定, 最终两面的升温斜率逐渐相同, 这是因为在加热功率一定, 导热速率一定的情况下形成了平衡, 故此时两曲线斜率接近一致, 温度同步上升, 慢慢进入准稳态阶段, 这时两面升温速率已接近一致, 温差是因为一开始升温时未能同步升温所形成的, 约为 5K 左右。我们认为最终曲线平滑时为稳定状态, 此时温差 $\Delta T = 5.135^{\circ}\text{C}$ 。

则我们即可计其模型参数, 导热系数为

$$\lambda = q_c R / 2\Delta t = 0.16806 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \quad (13)$$

根据实验升温, 利用 Origin 进行线性拟合, 即可得到升温速率, 其拟合图如??所示

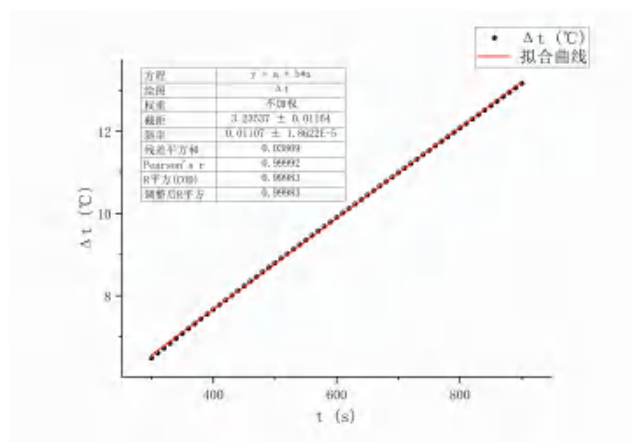


图 11: 双层仿真升温拟合

可得其升温速率为 0.01107 K/s 则可计算样品的比热为

$$c = q_c / (\rho R dt / d\tau) = 1303.7 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (14)$$

对比出其仿真参数与模型参数可得, 其相对误差分别为

$$\Delta\lambda = \frac{|0.16806 - 0.168|}{0.168} = 0.036\% \quad (15)$$

$$\Delta c = \frac{|1303.7 - 1333|}{1333} = 2.20\% \quad (16)$$

可见, 仿真效果较好, 其仿真参数与模型参数基本一致, 但模型仍然有改进的空间。

5.1.2 四样品模拟

进一步改进模型, 其为了更加符合实际实验模型, 引入四样品模型进行模拟, 即四个有机玻璃板, 同时加入两个加热面膜, 其中加热面膜厚度为 $l = 0.123 \text{ m}$, 加热膜导热系数为 $\lambda = 33.91 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 密度为 $\rho = 1663 \text{ kg/m}^2$, 恒压热容 $C_p = 1058 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

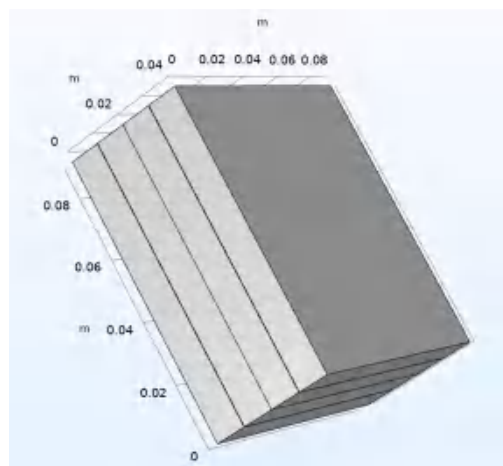


图 12: 四层仿真模型

全局参数如表??所示

表 2: 四层模型参数

参数名称	参数值	参数意义
Volt	19 V	加热电阻
Rr	110 Ω	加热膜电阻
SS	0.0081 m ²	加热膜面积
AA	0.85	修正因子
Qc	3.2818 W	单侧膜发热功率
qin	172.19 W/m ²	单侧热流密度
Q	3.294E6 W/m ³	未修正加热功率
l	1.23E-4 m	加热膜厚度
Qp	2.7999E6 W/m ³	已修正加热功率

为了使得加热部分温度计算更加精确, 我们对两加热膜进行网格细化。其运行结果如图??所示

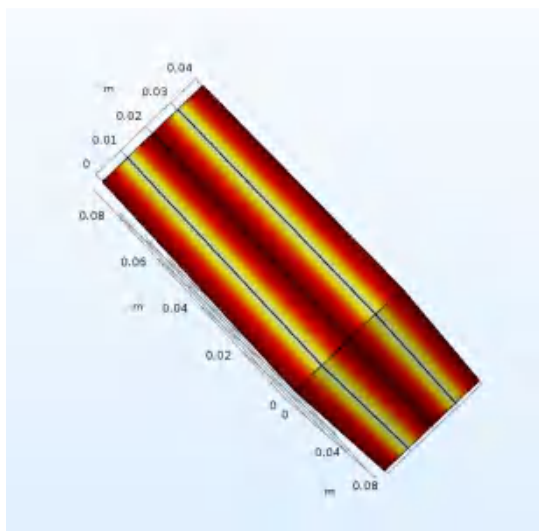


图 13: 四层仿真模型结果

输出数据作图

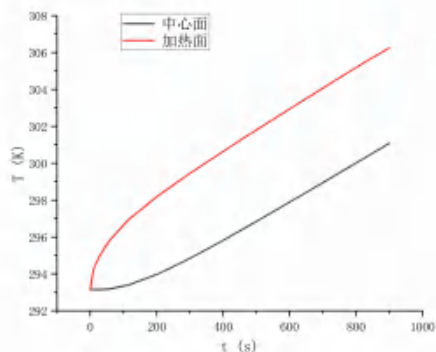


图 14: 四层仿真温度结果

做出两者温差, 并且作图可得

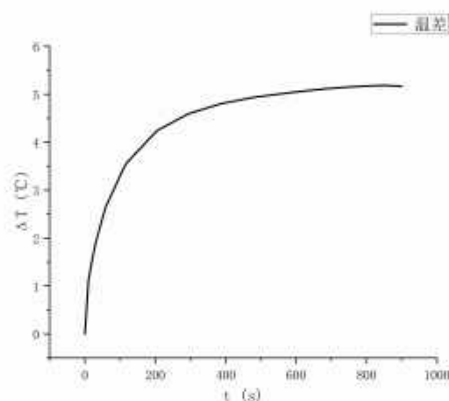


图 15: 四层仿真温差结果

取 600s-900s 温差平均值为结果, $\Delta T = 5.138^{\circ}\text{C}$ 。

根据实验升温, 利用 Origin 进行线性拟合, 即可得到升温速率, 其拟合图如??所示

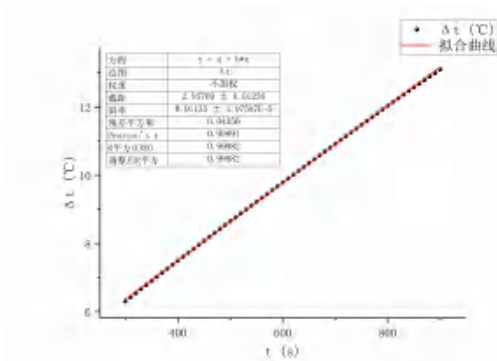


图 16: 四层仿真升温拟合

可知升温速率为 0.01135 K/s , 可分别算出其仿真结果为

$$\lambda = q_c R / 2 \Delta t = 0.16796 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K}) \quad (17)$$

$$c = q_c / (\rho R dt / d\tau) = 1271.5 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (18)$$

可得, 其相对误差为

$$\Delta \lambda = \frac{|0.16796 - 0.168|}{0.168} = 0.024\% \quad (19)$$

$$\Delta c = \frac{|1271.5 - 1333|}{1333} = 4.6\% \quad (20)$$

可见, 导热系数的误差降低了, 但比热的误差略大, 可

能是由于升温并非完全线性导致的，但误差仍然较小，仿真模型较为合理。

5.1.3 四样品且无修正因子 A 的模拟 (一)

进一步改进模型。此时加热功率不用修正因子（取 $A = 1$ ），通过在六块板（含两块加热膜）四周加上相应阻热层，阻热层与外面空气有热交换（满足第三类边条件，热交换系数 h 取 $150 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ），而六块板前后仅接触样品的部分板面绝热，阻热层为 PP 板，材料参数见表??。PP 板的底部高为 45 mm ，左右边宽均为 63 mm ，顶部高为 40 mm ，模型中四周 PP 板的总厚度均为 40.246 mm 左右。加热膜总厚度为 0.123 mm ，参数如表??。四块板参数与之前相同。

表 3: 阻热层参数

参数名称	参数值	单位
导热系数	0.26	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
密度	900	kg/m^3
恒压热容	1900	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

表 4: 加热膜参数

参数名称	参数值	参数意义
导热系数	67.09	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
密度	1681.1	kg/m^3
恒压热容	1090	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

其运行结果如图??所示

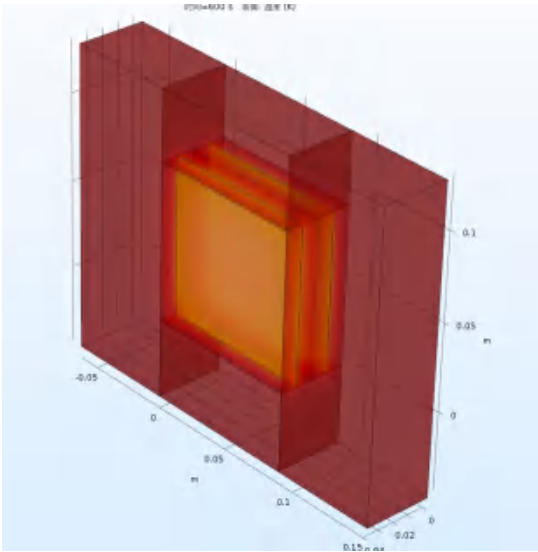


图 17: 无修正（一）仿真模型结果

输出数据作图

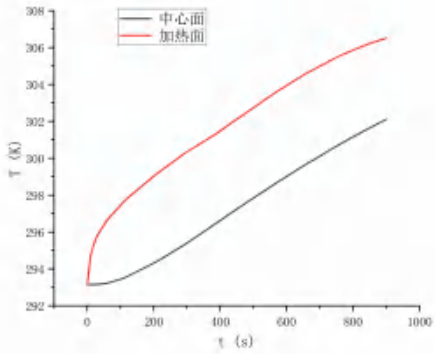


图 18: 无修正（一）仿真温度结果

做出两者温差，并且作图可得

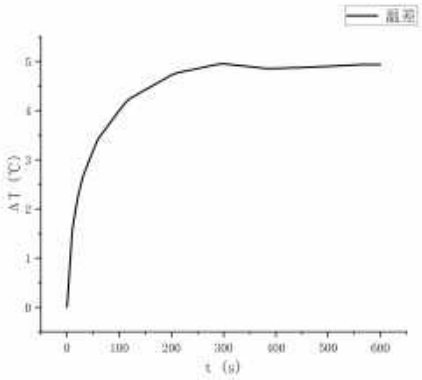


图 19: 无修正（一）仿真温差结果

取 300s-600s 温差平均值为结果， $\Delta T = 4.898^\circ\text{C}$ 。
根据实验升温，利用 Origin 进行线性拟合，即可得到升温速率，其拟合图如??所示

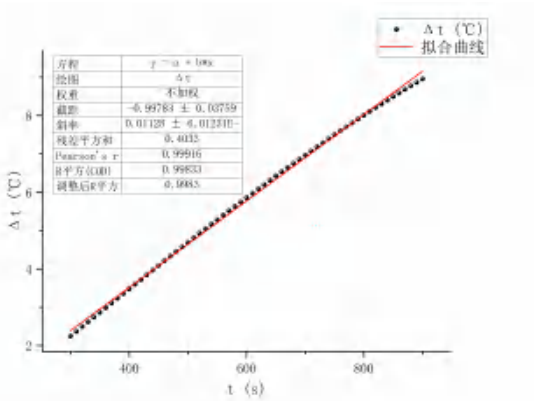


图 20: 无修正（一）仿真升温拟合

可知升温速率为 0.01128 K/s ，可分别算出其仿真结果为

$$\lambda = q_c R / 2 \Delta t = 0.2068 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K}) \quad (21)$$

$$c = q_c / (\rho R dt / d\tau) = 1501.6 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (22)$$

其误差相比于之前增大了，可能是去掉修正因子后使得模型变得不稳定，以及网格并未细化，阻热层参数并不完善等，故我们进一步优化模型。

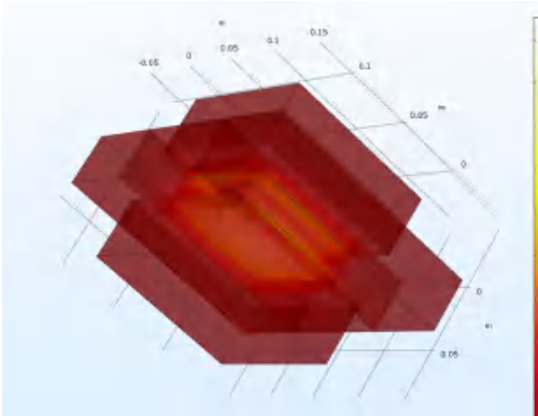


图 21: 无修正（二）仿真模型结果

5.1.4 四样品且无修正因子 A 的模拟（二）

继续优化，阻热层系数改为表??，六块板前后两板面加上厚泡沫板作为隔热层但不完全绝热，其参数如表??所示，泡沫板截面是边长为 122 mm 的正方形，有机玻璃板被压在泡沫板截面正中央，厚泡沫板的厚度为 47 mm ，左右两块对称，厚泡沫板四周及外边固定泡沫用的木板框厚度为 5 mm ，在此模型中基本可以忽略不计。加热膜参数不变。

表 5: 阻热层优化参数

参数名称	参数值	单位
导热系数	0.90	$\text{W} / (\text{m} \cdot \text{K})$
密度	920	kg / m^3
恒压热容	1900	$\text{J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$

表 6: 泡沫层参数

参数名称	参数值	单位
导热系数	0.046	$\text{W} / (\text{m} \cdot \text{K})$
密度	400	kg / m^3
恒压热容	4200	$\text{J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$

其运行结果如图??所示

输出数据作图

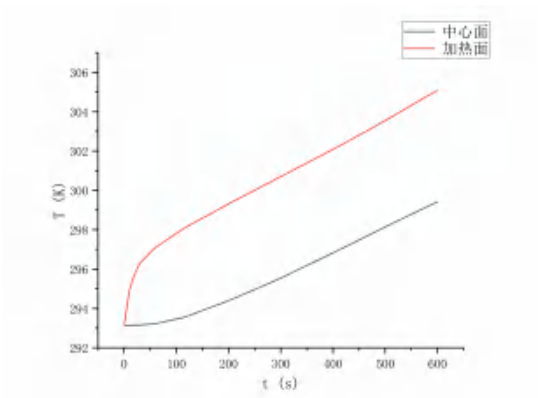


图 22: 无修正（二）仿真温度结果

做出两者温差，并且作图可得

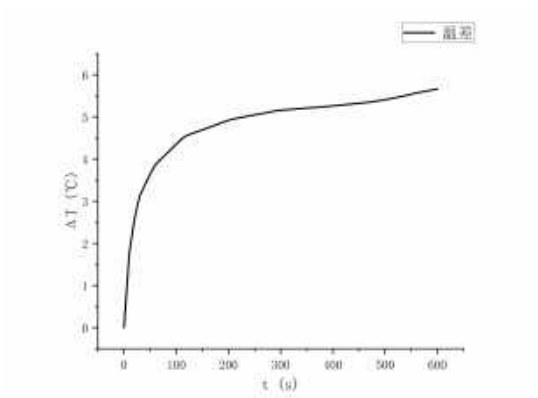


图 23: 无修正（二）仿真温差结果

取温差基本恒定时 $\Delta T = 5.661^\circ\text{C}$ 。
根据实验升温，利用 Origin 进行线性拟合，即可

得到升温速率，其拟合图如??所示

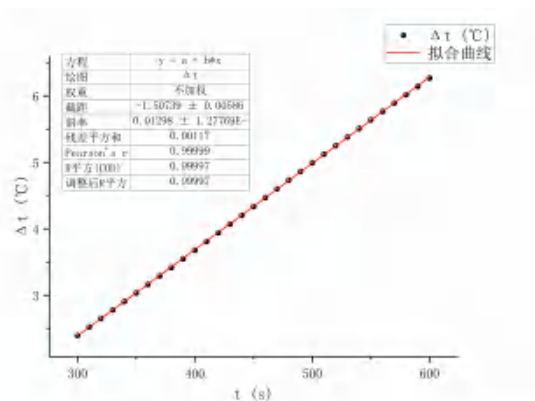


图 24: 无修正（二）仿真升温拟合

可知升温速率为 0.01298 K/s ，可分别算出其仿真结果为

$$\lambda = q_c R / 2 \Delta t = 0.179 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K}) \quad (23)$$

$$c = q_c / (\rho R dt / d\tau) = 1304.9 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (24)$$

可得，其相对误差为

$$\Delta \lambda = \frac{|0.179 - 0.168|}{0.168} = 6.55\% \quad (25)$$

$$\Delta c = \frac{|1304.9 - 1333|}{1333} = 2.1\% \quad (26)$$

我们可以看到，实验与仿真仍存在一定的偏差。我们认为产生该误差的主要原因是，在该模型下，加热片的参数设置有误，导致加热功率偏高。我们认为这是在我们划分网格时，加热片划分过粗导致的因此导致仿真与实验得到的结果存在较大偏差，以及修正因子的偏差等因素也可能造成这样的结果。

5.1.5 探索修正因子 A 影响

由于没有进行实际实验，故我们讨论 A 的影响。

根据之前的模型，我们改变修正因子，观察其影响。通过仿真导出数据利用 Origin 作图，其多种情况下的升温曲线如图??所示

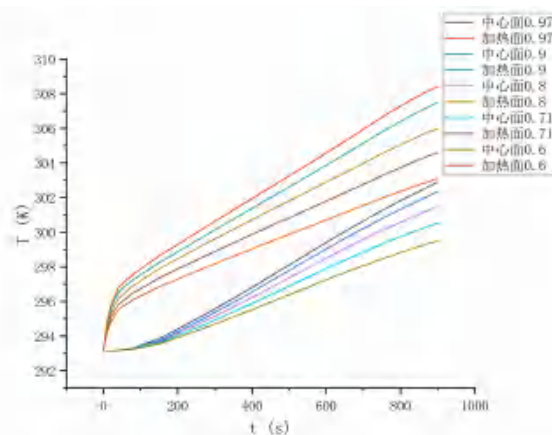


图 25: 不同修正因子 A 下的升温曲线

并且作出温差图，可以直观的看出其影响，其如图??所示

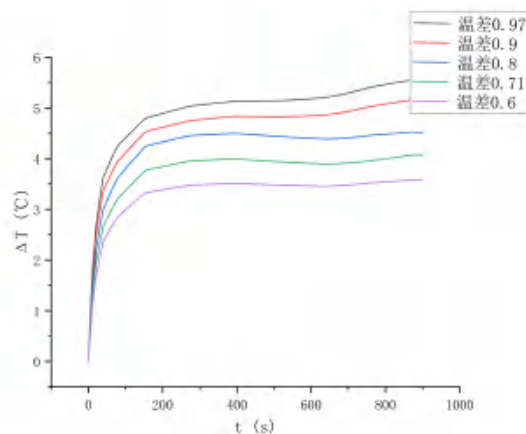


图 26: 不同修正因子 A 下的温差曲线

实际上，A 用于修正流入中心面的热流密度，其直接影响中心面所吸收到的热量速率，我们根据结果也可以看出，当 A 越大，即热流密度越大，其升温速率也变大，并且由于热传导的效应，其中心面与加热面的温差也逐渐上升，符合实际情况。

5.2 基于 LabVIEW 的 PID 控温设计实验

5.2.1 搭建 LabVIEW 与 Rigol 联动平台

首先我们测试 5-10V 不同加热功率下的升温 and 降温曲线，利用 Origin 作图如图??

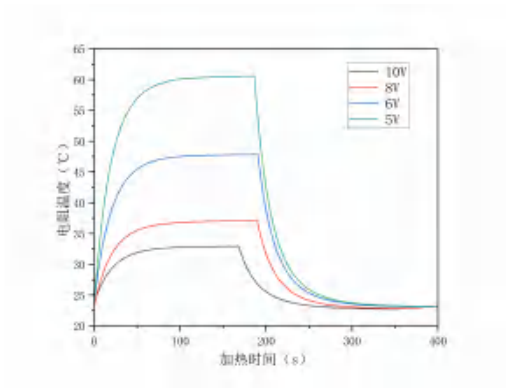


图 27: 不同功率下的升温降温曲线

从对电压为 10V 时平衡后的温度取平均值可以得到: $T_{\max}=60.56^{\circ}\text{C}$, $T_e=22.97^{\circ}\text{C}$ 。

5.2.2 PID 控制调参

在程序中加入 PID 控制器模块，并做好闭环控制结构，其如图??，控制前面板如图??所示

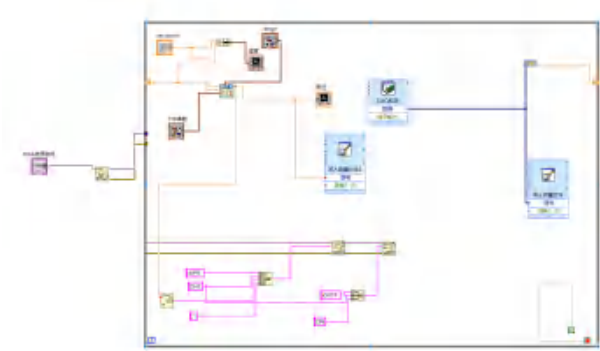


图 28: PID 控制程序框图

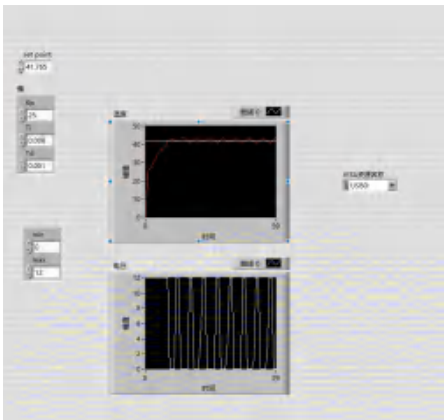


图 29: PID 控制前面板

A. 不同 K_p 下的控温

然后设定温度，观测控温效果，其不同 K_p 下的控温曲线如图??所示，其标准差见表??。

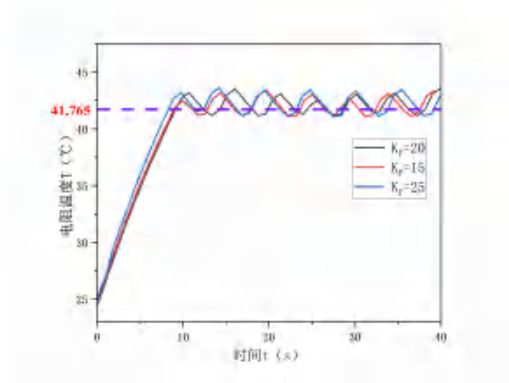


图 30: 不同 K_p 下的控温曲线

表 7: 不同 K_p 下的控温标准差

K_p	$\sigma/^{\circ}\text{C}$
15	0.7649
20	0.7205
25	0.8207

可以看出，由于安全电压上限（12V）的存在，当 K_p 发生改变时，在加热阶段电源电压将始终保持为 12V，故温度到达稳定的时间基本不会发生变化，通过对标准差进行计算衡量，可知 K_p 为 20 的时候温度曲线的波动是最小的。

B. 不同 T_i 下的控温

然后改变 T_i ，进行不同 T_i 下的升温曲线测量，其结果如图??所示

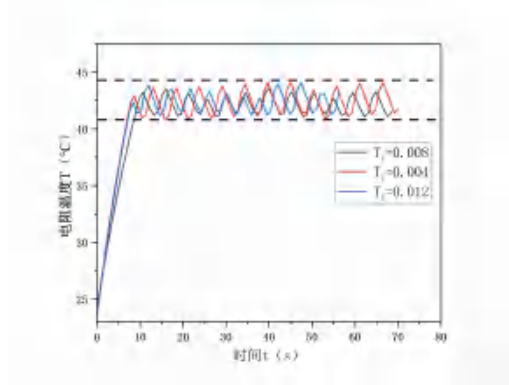


图 31: 不同 T_i 下的控温曲线

表 8: 不同 T_i 下的控温标准差

T_i	$\sigma/^\circ\text{C}$
0.004	0.9768
0.008	0.7205
0.012	0.8044

由图像可以看出，对于不同的 T_i ，电阻的加热过程几乎重合，因此可以认为 T_i 的改变对达到稳定的时间几乎没有影响。

但是图中黑色曲线波动范围明显比红色和蓝色曲线要小，通过对标准差的计算，其有较为明显的变化，而当 T_i 为 0.008 时，曲线达到稳定后的温度数据标准差最小，即平均而言波动范围最小，效果最好。

C. 不同 T_d 下的控温

最后我们在考虑 T_d 的影响，通过设定不同的 T_d 其结果如图??，标准差如表??所示。

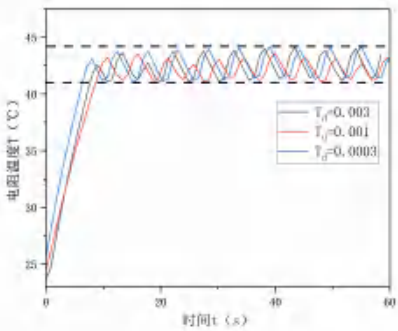


图 32: 不同 T_d 下的控温曲线

表 9: 不同 T_d 下的控温标准差

T_d	$\sigma/^\circ\text{C}$
0.0003	0.9699
0.001	0.7205
0.003	0.9619

可以看出，对于不同的 T_d ，电阻的加热过程曲线几乎平行，三条曲线加热过程的微小差距主要来源于初始温度的不同，可能是降温并未完全导致的，因此可以说明 T_d 的变化对达到稳定的时间几乎没有影响。

但是图中红色曲线波动范围明显比红色和蓝色曲线要小，通过对标准差的计算可知， T_d 发生变化时，标准差也有较为明显的变化，当 T_d 为 0.001 时，曲线

达到稳定后的温度数据标准差最小，即平均来说，波动范围最小，效果最好。

D. 测试跟随情况

通过如上分析可以得到，响应时间最短，波动最少的一组参数为：

$$\begin{aligned} K_P &= 20 \\ T_i &= 0.008 \\ T_d &= 0.001 \end{aligned} \tag{27}$$

我们即利用此参数进行阶跃函数的跟随操作。根据老师提供的阶跃函数，实验结果如图??所示。

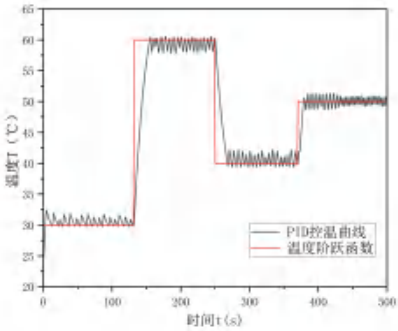


图 33: PID 控温对阶跃函数的跟随情况

由电阻的吸热升温方程可知，温度瞬态解的形式为：

$$T(t) = T_1 \left(1 - \frac{T_1 - T_0}{T_1} e^{-At} \right) \tag{28}$$

其中 T_1 为设定的目标温度， T_0 为初始温度。

若当 $t=\tau$ 时，满足 $A\tau=1$ ，即 $T=T_1-(T_1-T_0)\times 0.632$ ，此时的 τ 即被称为升温过程的时间常数，可以用于衡量升温过程的快慢，其特征参数如表??所示

表 10: PID 对阶跃函数跟随的特征参数

$T_i/^\circ\text{C}$	$\bar{T}/^\circ\text{C}$	$\sigma/^\circ\text{C}$	τ/s
30	30.47	0.505	2.16
60	59.30	0.792	10.90
40	40.54	0.798	4.40
50	50.08	0.595	1.49

时间常数与目标提升的温度有关，根据上表可以看出，即使是温度上升 30°C ，其时间常数也能够控制在 10s 左右，说明该 PID 控温程序对阶跃函数有较好的跟随效果，并且最终温度的标准差和平均值偏差也

均在 1°C 内, 说明该 PID 程序能够很好的将温度以较小的波动保持在目标温度附近, 即跟随效果较好。

5.2.3 开放实验内容

最后自己设计一个控制器取代 PID, 评估这个控制器的控制效果。

通过对 PID 原理的理解, 将积分转化为对误差的累加, 将微分转化为差分, 并利用 LabVIEW 中的仿真元件, 我们搭建了新的控制器来取代实验中使用的 PID 控件, 其界面如图??,??所示

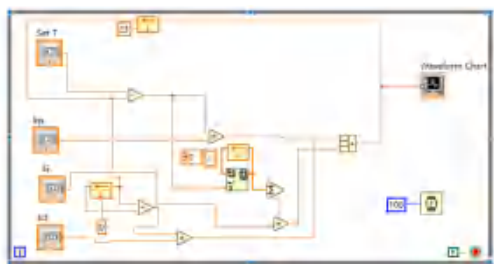


图 34: 自主设计 LabVIEW 程序框图

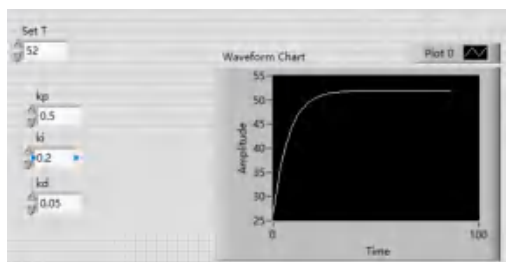


图 35: 自主设计 LabVIEW 前面板

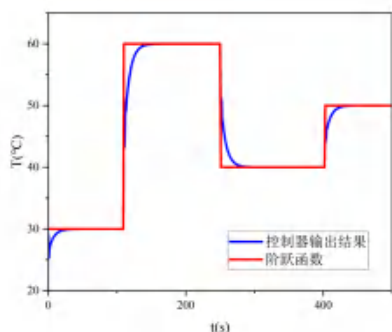


图 36: 控制器对阶跃函数的跟随情况

根据图??可知, 该控制器同样实现了对温度的跟随作用, 并且因为仿真没有噪声和干扰等的影响, 所以

最终控制器输出结果十分稳定, 几乎无偏差地到达设定值, 倘若要更加贴近现实情况, 则应当在每一步计算中加入一定的随机误差, 从而模拟现实中的噪声及干扰。

6 结论

首先, 我们利用 COMSOL 进行了对热不良导体的仿真, 通过设置不同参数以及模型, 从两层模型到四层模型, 然后不断优化, 同时根据仿真值与设定值进行计算, 可以衡量模型精确度, 从而得出修正因子 A 的重要性。然后通过设定不同的修正因子 A, 得到不同情况下的输出, 对比发现, A 越大中心面升温速度越快, 并且中心面和加热面的温差也越大, 与实际的热传导结果相符合, 仿真较为成功。

然后我们利用 LabVIEW 进行了电阻热传导性质的研究, 通过搭建 LabVIEW 与 Rigol 平台进行联动, 研究了不同加热电压下的电阻升降温过程曲线, 同时利用 LabVIEW 中的 PID 控温程序研究了不同参数下电阻升温曲线与目标温度的跟随情况以及波动情况, 最终得到了该实验条件下 PID 控温的最佳参数为

$$K_P = 20$$

$$T_i = 0.008$$

$$T_d = 0.001$$

并利用 PID 程序对教师给出的阶跃函数进行跟随, 证明了这一组参数的合理性。

基于 PID 的实验原理, 我们进一步自主设计了一种控制器, 很好地实现了对阶跃函数的跟随功能, 并且可以进一步引入随机误差来研究自主设计的控制器对外界扰动的响应效果如何, 从而得到更加符合现实世界的效果。

参考文献

- [1] 沈韩等. 基础物理实验 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.
- [2] 葛新石叶宏. 传热和传质基本原理. 北京: 化学工业出版社, 2007
- [3] 冯晓燕, 贺熙, 游小龙, 周林凯, 单保平. 热传导问题的数值分析方法概述 [J]. 大众标准化, 2022(16):91-93.

- [4] 袁瑞琳, 陈龙, 吴长征. 二维纳米材料热传导行为及其界面调控 [J]. 化学学报, 2022, 80(06): 839-847.
- [5] 张开达, 宋李兴. 基于 COMSOL 的单次脉冲激光辐照氧化铝陶瓷温度场分析 [J]. 中国水运 (下半月), 2022, 22(11): 46-48.
- [6] 曹威, 马嘉欣, 陈宝远. 基于 Comsol 软件仿真技术的光学式电场传感器特性研究 [J]. 电子制作, 2022, 30(19): 91-93+26.
- [7] 侯娟, 陆向前, 刘思彤, 刘磊. 膨润土衬垫溶质扩散及渗透行为 COMSOL 模拟 [J]. 环境工程学报, 2022, 16(08): 2691-2698.
- [8] 王兴君, 王巍然. 基于 COMSOL 的材料杨氏模量的超声测量研究 [J]. 科学技术创新, 2022(23): 1-6.
- [9] 陈宗元, 祖甘霖, 牛智伟, 靳强, 郭治军, 吴王锁. COMSOL Multiphysics 在物理化学教学中的应用 [J/OL]. 大学化学: 1-7[2022-12-21].
- [10] 梁威, 杨超, 曹菊勇, 袁涛, 周天俊. COMSOL 软件进行流体力学基础教学的探索 [J]. 汽车实用技术, 2022, 47(15): 161-163.
- [11] 杨忠仁, 饶程, 邹建, 彭珍莲. 基于 LabVIEW 数据采集系统 [J]. 重庆大学学报 (自然科学版), 2004(02): 32-35.
- [12] 徐超. LabVIEW 在实时测控系统中的应用研究 [D]. 重庆大学, 2005.

A 附录

A.1 原始数据

原始数据以及仿真工程已经上传至 seelight 中。

A.2 思考题

1. 什么是第一类边条件 (*Dirichlet* 条件)、第二类边条件 (*Neumann* 条件) 和第三类变条件 (*Robin* 条件), *COMSOL* 能求解哪种边条件的问题?

广义来讲, 边界条件是通过通量与参量值定义的, 实际上, 第一类边界条件为边界无通量, 第二类边界条件为边界通量恒定, 第三类边界条件处通量与该处的参量值呈线性关系。对于热传导模型, 即为如下:

①第一类边界条件要求待求解域边界处的温度恒定不变。当系统边界处与一个较大的恒温热库接触时, 可认为系统满足第一类边界条件。此时有

$$T|_{\partial} = \text{const} \quad (1)$$

②第二类边界条件要求待求解域边界处具有恒定不变的温度梯度。当输入热通量受调控而恒定时满足第二类边界条件。此时有

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \text{const} \quad (2)$$

其中, $\frac{\partial T}{\partial n}$ 为温度在边界处的法向梯度。

③第三类边界条件要求待求解域边界处温度梯度与温度呈线性关系, 在热学模型中即边界处热量按牛顿冷却定律传输, 即

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{\text{ext}}) \quad (3)$$

其中, h 为边界处传热系数, T_{ext} 为外界温度。

对于 *COMSOL*, 通过调节边界特性, 能进行三种边界条件的仿真实验。

2. 选择四块板加两个加热膜 (共六块板) 的情形下, 为何膜的通电加热功率要乘以修正因子 A ?

因为考虑到样品和加热膜侧面并非理想的绝热条件, 而是有一个阻热层, 阻热层也会导致散热, 部分加热膜产生的热量应当从边界处散失, 因此样品上热量净积累量应乘该修正系数。

英文摘要在文章最后!

A.3 教师签名页

基础物理设计实验部分

实验 C8.3 热传导过程的 COMSOL 模拟

实验人: 陆尚润

学号: 210517

实验时间: 2023年3月17日 下午

实验地点: 陆尚润重 311

实验目的

1. 利用 COMSOL 模拟不良导体热传导至实验的热过程。
2. 通过评估仿真结果与实验结果的异同, 学习如何更优的拟合数据

实验原理

本实验将利用 COMSOL 软件仿真不良导体热传导至实验的热过程, 以得到温度与中心面随时间变化的关系。这里对不良导体的热传导模型简单介绍:

1. 准静态热传导模型

考虑如图 1 的二维一维无限大平板模型, 一有限大不良导体平板厚度为 $2a$, 左右面宽度为 b , 在平板两侧同时施加均匀的指向中心面的热流密度 q_0 , 则平板上各点的温度将随加热时间 t 而变化, 故 x 处的温度可表示为 $t(x, t)$, 有热传导方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial t(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 t(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial t(x, t)}{\partial x} = \frac{q_0}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial t(x, t)}{\partial x} = 0 \\ t(x, 0) = t_0 \end{cases}$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, $q_0 = c \rho k \frac{\partial t}{\partial x}$, λ 为材料的热导系数, ρ 为材料的密度, c 为材料的比热。

其解为:

$$t(x, t) = t_0 + \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{a}{k} t + \frac{1}{2a} x^2 - \frac{R}{6} + \frac{2R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{R} \exp \left(-\frac{a n^2 \pi^2}{R^2} t \right) \right]$$

可见, 随着加热时间 t 的增加, 样品内部各点的温度将发生变化。若例数项求和项中存在指数衰减因子, 定量分析表明, 当加热时间 t 满足 $a t / R^2 > 0.5$ 时, 该求和项可以忽略, 则简化

$$t(x, t) = t_0 + \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{a}{k} t + \frac{1}{2a} x^2 - \frac{R}{6} \right]$$

则被加热样品中心 ($x=0$) 和表面 ($x=R$) 处的温度分别为:

$$\begin{cases} x=0, t(0, t) = t_0 + \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{a}{k} t - \frac{R}{6} \right] \\ x=R, t(R, t) = t_0 + \frac{q_0}{\lambda} \left[\frac{a}{k} t + \frac{R}{3} \right] \end{cases}$$

两处的温度及随加热时间 t 线性上升, 升温速率为 $q_0 / \lambda R$, 这是一个由材料热导性能和实验条件决定的系数。而加热面中心和中心面间的温差为

$$\Delta t = t(R, t) - t(0, t) = \frac{q_0 R}{2a \lambda}$$

此时, 若选择样品厚度 $2a$ 不变, 而 t 与加热时间 t 无关并维持恒定, 这种状态称为稳态, 则

$$\Delta t = \frac{q_0 R}{2a \lambda}$$

样品的比热为

$$C = q_c / (\rho k d t / d t)$$

其中 $d t / d t$ 为样品的升温速率, 当控制下, 样品的升温速率相等, 则只要测出样品
下样品的升温速率及表面积为 S , 即可求出比热 C 。

[实验内容步骤]

1. 利用 COMSOL 建立不同材料热传导率不同量化的样品升温模型。

- (1) 选择维度 (2) 选择物理场 (3) 选择研究内容 (4) 设置边界参数 (5) 构建几何体 (6) 选择材料
- (7) 设置“固体传热”模型 相关参数 (8) 设置域及探针 (9) 设置初始条件和加热面的位置
- (9) 设置网格 (10) 设置研究内容 (11) 查看求解结果 (12) 设置所需参数

2. 对样品的模拟

依照前面步骤, 做出 4 个样品, 再加上两个加热面, 对各个样品的仿真模型进行模拟。
同样进行后, 得到其各个面的温度, 每个加热面温度都修正后的功率 q_c 。

3. 对样品且无修正因子 A 的模拟 (一)

此时加热功率不用修正因子 (取 $A=1$), 建立一块板, 中间加上阻 (阻在热层, 阻层与外面完全直接接触, 而这块板后仅接触样品的部分板面绝热, 阻层为铝板。仿真结果与实验数据

4. 对样品且无修正因子 A 的模拟 (二)

依照前面步骤, 做出 7 个样品的 COMSOL 模拟。最后算出 10 分钟计算后稳定时, 样板中心面
与加热面的温度差 $\Delta T = 5.17K$, 与实验数据的最大相对误差仅 0.90%, 中心面温度下降时间的变化率 $\Delta T / T = 0.0110K$, 与实验数据的最大相对误差仅 0.02%。

5. 实验修正因子 A 的确定

回到两块样品的情形, 调整热流密度的修正因子 A 的取值, 进行 COMSOL 模拟, 确定其 A
取值用两块样品的仿真结果才能与实验结果相符合。

[实验数据]

数据已上传至 seelight

实验 C84 基于 LabVIEW 的 PID 控温设计实验

实验人: 陈尚明 学号: 21003107

实验时间: 2023年3月31日 星期五下午 实验地点: (陆祖堂31)

[实验目的]

1. 搭建搭建 LabVIEW + Rigol 软硬件联动系统, 熟悉硬件驱动的基本实现过程
2. 建立温度控制回路, 理解自动控制的基本思想和方法
3. 利用 PID 控制、开关控制等实现中阻加热, 熟悉控制回路的搭建

[实验原理]

1. 自动控制系统介绍

自动控制是指在没有人直接干预下, 利用物理装置对生产过程或工程进行合理的控制, 使被控制的物理量保持恒定或一定规律的变化。实现自动控制且由建立的组合体称为自动控制系统。

一个典型的自动控制系统可以分解为控制器、被控对象和检测装置等部分, 根据信息反馈可以划分为开环控制、闭环控制, 给定系统称为开环。

有两种常见的控制方式

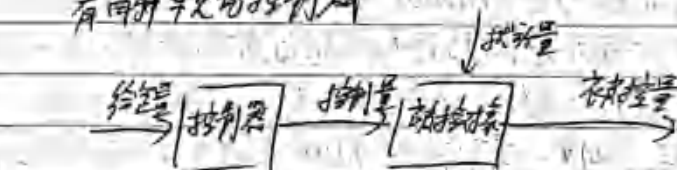


图1 开环控制结构图

开环控制是控制器对被控对象进行控制, 开环量较闭环控制精度要低, 根据被控对象运行状态的失称结果, 由控制器输入特定的控制量进行控制。

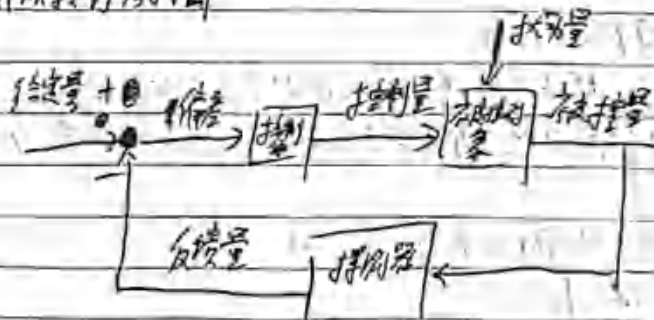


图2 闭环控制结构图

闭环控制则是以系统输出值与被控量进行比较, 将偏差量输入到特定的控制器中, 根据一定的控制算法和硬件实现输出控制量对被控量进行控制。

2. PID 控制介绍

闭环控制中, 控制器的实现包括控制算法和硬件实现两个重要部分。其中, 控制算法指根据给定量和反馈量产生的偏差, 计算控制器输出量的实现算法。传统的控制算法有 PID (比例 Proportion, 积分 Integral 和微分 Derivative) 控制, 模糊控制, 神经网络控制等。

No.

Date.

[数据记录]

数据已传至 seelight.

阿

图 4: 签名页 4

Experiment RX1

COMSOL simulation of heat transfer processes

Experiment RX2

LabVIEW-based PID temperature control design experiment

Shangrun Lu¹

¹ School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: LabVIEW, short for Laboratory Virtual Instrumentation Integrated Environment, is not only an environment for the development of virtual instruments, but also a programming language that is extremely functional, and COMSOL is software for the analysis of multi-physics field coupling when solving partial differential equations or systems of equations, with many integrated modules. Heat conduction is one of the three basic modes of heat transfer in isotropic thermal conductors, which obey Fourier's law of thermal conductivity and are capable of exhibiting distinct temperature characteristics in thermal conductors. In this experiment, we first carried out a simulation of the heat conduction experiment using COMSOL, from a two-layer model to a four-layer model, and then continuously optimised the model parameters, constantly comparing the simulation results with the set parameters, comparing the importance of the correction factor, and by setting different correction factors A, we can obtain the model heating rate and the temperature difference between the heating surface and the central surface increases with the increase of the correction factor. Then we used LabVIEW to study the heat conduction properties of the resistance. By setting up LabVIEW and Rigol platform for linkage, we investigated the curve of the resistance temperature rise and fall under different heating voltages, and also used the PID temperature control program in LabVIEW to study the following situation and fluctuation of the resistance temperature rise curve and the target temperature under different parameters. After arriving at the optimum parameters, the following of the step function was studied and the effect was good. Finally, a controller was designed and built independently, and the simulation showed that the following effect was good. The experiments are more successful.

Key words: LabVIEW;COMSOL;Heat transfer;PID temperature control;Resistance heating